

**Optics Review: Geometrical Optics, Wave Optics, EM
Waves, and Quantum Basics**

Contents

1	wave optics	5
1.1	Law of Reflection	5
1.2	Fermat's Principle	5
1.3	Law of Refraction (Snell's Law)	5
1.4	Total Internal Reflection	5
1.5	Numerical Aperture (NA)	5
1.6	Fermat's Principle for Inhomogeneous Media	6
1.7	Mirrors	6
1.7.1	Plane Mirrors	6
1.7.2	Concave Mirrors	7
1.7.3	Imaging Equation & Magnification for concave mirror:	7
1.7.4	Parabolic Mirrors	8
1.8	Prism	8
1.8.1	Deflection Angle	8
1.8.2	Dispersion	8
1.8.3	The change of the deflection angle with refractive index	9
1.9	Lenses	9
1.9.1	Spherical surface	9
1.9.2	Thin lens	10
1.9.3	Sign convention of a, b, R_1, R_2 for thin lens & spherical lens	10
1.9.4	Bessel's method	11
1.9.5	Magnification of a lens	11
1.9.6	Thick lens	12
1.9.7	Imaging Equation for thick lens	12
1.9.8	Human's eye's refractive power (the unit is diopters(D))	14
1.9.9	Resolution Limit of the eye	14
1.9.10	Evaluating the refractive error	14
1.9.11	Angular magnification	14
1.9.12	Magnifying glass	15
1.9.13	Two lens system	15
1.9.14	The magnification of lens - eyepiece system	15
1.9.15	Light Gathering power	15
1.10	Imaging errors	16
1.10.1	Chromatic Aberration	16
1.10.2	Spherical aberration	16
1.10.3	Field Curvature	16
1.10.4	Coma	17
1.10.5	Astigmatism	17
1.10.6	Cushion Distortion	17
1.10.7	Barrel Distortion	17
1.11	Rainbow, single drop analysis	17

1.11.1	Primary and Secondary Rainbows	18
1.12	Wave Optics	18
1.12.1	Wave equation	18
1.12.2	Monochromatic wave	18
1.12.3	Intensity of waves	19
1.12.4	Optical Power P of a wave	19
1.12.5	Wave fronts	19
1.12.6	Plane waves	19
1.12.7	Dispersion Relation	20
1.12.8	In a Medium	20
1.12.9	Snells law	20
1.12.10	Spherical waves	20
1.13	Interference	20
1.13.1	Phase difference related to path difference between two waves.	21
1.13.2	Coherence	21
1.13.3	Interferometers	22
1.13.4	Michelson Interferometer	23
1.13.5	Mach-Zehnder Interferometer	24
1.13.6	Application: Electro-Optic Modulators in Photonic Integrated Circuits	24
1.13.7	Sagnac Interferometer	24
1.13.8	Derivation and Application in Fiber-Optic Gyroscopes	24
1.14	Double Slit Interference	25
1.14.1	Two point sources	25
1.14.2	INTERference Conditions for buouble slit	26
1.14.3	Intensity Distribution	26
1.14.4	Resolution	26
1.14.5	Fresnel Double Mirror	27
1.14.6	Fresnel Biprism	27
1.14.7	Basic Principle of Thin Film Interference	28
1.14.8	Normal incidence : $\alpha = 0$	28
1.14.9	Thickness for constructive interference	28
1.14.10	Fixed thickness, understanding colored films	29
1.14.11	Anti-Reflection Coating	29
1.14.12	Newton Rings	29
1.14.13	Multiple Wave Interference with Constant Amplitude	30
1.14.14	Application: Diffraction Gratings	30
1.14.15	Wavevector Representation: A Powerful Geometric Insight	31
1.14.16	Multiple Wave Interference with Decreasing Amplitude	31
1.14.17	Fabry Perot Interferometer	32
1.14.18	Finesse and Spectral Properties	32
1.14.19	Ring Pattern Formation	33
1.14.20	Huygens Principle	34
1.14.21	Single Slit Diffraction	34
1.14.22	Circular Aperture	35
1.14.23	Application: Diffraction Grating	35
1.14.24	Properties of the Diffraction Pattern	36
1.15	Diffraction in Applications	36
1.15.1	Rayleigh's Criterion for Resolution	36
1.15.2	Abbe's Criterion	37
1.16	Fresnel Zones	38
1.16.1	Fresnel Zone Plate	38
1.16.2	Diffraction Integral	39

2.0.1	Electromagnetic Spectrum	41
2.0.2	Maxwell Equations	41
2.0.3	Deriving the Wave Equation	42
2.0.4	Michelson-Morley Experiment	42
2.0.5	Plane waves	43
2.0.6	Spherical Waves	43
2.1	Polarization of EM Waves	43
2.1.1	Linearly Polarized waves	44
2.1.2	Circularly Polarized Waves	44
2.1.3	Elliptically Polarized Waves	44
2.2	Unpolarized Light	45
2.2.1	Analyzing Polarization & Law of Malus	45
2.2.2	The Three Polarizer Paradox	45
2.3	Energy Transport and Momentum Transport of EM waves	46
2.3.1	Energy Transport	46
2.3.2	2. ポインティング・ベクトルとエネルギー保存則 (Poynting Vector and Energy Conservation)	46
2.3.3	Intensity and Measurement	47
2.3.4	Momentum Transport and Radiation Pressure	47
2.3.5	Microscopic Picture of Dielectric Response	48
2.3.6	Single Atom Response	48
2.3.7	Macroscopic Description of Dielectric Materials	48
2.3.8	クラウジウス・モソッティの関係式 (Clausius-Mossotti Relation)	49
2.3.9	Maxwell's Equations in Matter	49
2.3.10	構成方程式 (Constitutive Relations):	49
2.3.11	物質中の波動伝搬 (Wave Propagation in Non-conducting Matter)	50
2.3.12	特殊なケース：負の屈折 (Negative Refraction)	50
2.3.13	負の屈折率物質中のエネルギー流 (Energy Flow)	50
2.3.14	メタマテリアルの実現 (Metamaterial Realization)	50
2.3.15	Interaction Model & Approximations	51
2.3.16	吸収とランベルト・ベールの法則 (Absorption & Lambert-Beer Law)	51
2.3.17	Dispersion: Phase & Group Velocity	52
2.3.18	Normal & Anomalous Dispersion	52
2.3.19	超光速群速度 (Superluminal Group Velocity)	52
2.3.20	クラマース・クローニッヒの関係式 (Kramers-Kronig Relations)	52
2.4	Reflection and Refraction of Electromagnetic Waves	53
2.4.1	Effect of the Refractive Index	53
2.4.2	反射と屈折の一般的記述 (General Description of Reflection and Refraction)	53
2.4.3	境界条件 (Boundary Conditions)	54
2.4.4	反射と屈折 (Reflection/Refraction) - 周波数と波数の整合 (matching)	55
2.5	Fresnel Equations	55
2.5.1	Reflection	55
2.5.2	s 偏光 (s-polarized light)	56
2.5.3	S polaized light	56
2.5.4	空気からガラスへの反射と位相 (Air to Glass)	56
2.5.5	ガラスから空気への反射：全反射 (Total Internal Reflection)	56
2.5.6	エバネッセント波 (Evanescent Wave)	57
2.5.7	強度 (Intensities)	58
2.5.8	Electromagnetic Waves in Metals	58
2.5.9	ドルーデモデル (Drude Model)	59
2.5.10	複素屈折率と導電率 (Complex Refractive Index & Conductivity)	59
2.5.11	Reflectivity of Metals	60
2.5.12	分散関係と表皮効果 (Dispersion Relation & Skin Depth)	60
2.5.13	プラズモニクス (Plasmonics)	60

2.6	Anisotropic Materials	61
2.6.1	Light propagation	61
2.6.2	誘電率テンソルと主座標系 (Dielectric Tensor and Principal Coordinate System)	61
2.6.3	主座標系 (Principal Coordinate System)	61
2.6.4	エネルギーの流れと位相の伝搬 (Energy Flow vs Phase Propagation)	61
2.6.5	結晶の対称性と分類 (Symmetries: Uniaxial and Biaxial)	62
2.6.6	固有モード：常光線と異常光線 (Normal Modes: Ordinary and Extraordinary rays)	62
2.6.7	k 曲面 (波数ベクトル曲面) と分散関係 (The k -surface)	62
2.6.8	複屈折 (Birefringence)	62
2.6.9	波長板 (Wave Retarders)	63
2.7	Optical Activity and Rotatory Dispersion	63
2.7.1	電磁気学的メカニズム：双極子モーメントの結合	63
2.7.2	円複屈折とその電子的起源 Circular Birefringence (円複屈折)	64
2.7.3	量子力学的基礎 Quantum Mechanical Foundation	64
2.7.4	コットン効果と波長依存性 The Cotton Effect (コットン効果)	65
2.7.5	砂糖水溶液におけるケーススタディ Sugar Solutions	65
2.7.6	温度効果と応用 Temperature Effects & Applications	65
2.8	Dipole Radiation	66
2.8.1	1. 加速電荷による電場の発生 (Electric Field of an Accelerated Charge)	66
2.8.2	エネルギーの流れとポインティング・ベクトル (Energy Flow & Poynting Vector)	67
2.8.3	ラーモアの公式 (Larmor's Formula):	67
2.8.4	振動双極子とレイリー散乱 (Oscillating Dipole & Rayleigh Scattering)	67
2.8.5	ミー散乱とメタマテリアル (Mie Scattering & Metamaterials)	68
2.9	Black Body Radiation	68
2.9.1	黒体とキルヒホッフの法則 (Blackbody and Kirchhoff's Law)	68
2.9.2	モード密度の導出 (Derivation of Spectral Density of Modes)	69
2.9.3	レイリー・ジーンズの法則 (Rayleigh-Jeans Law)	69
2.9.4	プランクの法則 (Planck's Law)	70
2.9.5	プランクの放射公式	70
2.9.6	プランク定数の測定 (Measuring Planck's Constant)	70
2.9.7	関連する法則と応用 (Related Laws and Applications)	70
2.10	The Wave Character of Particles, Electron diffraction and de brogile wavelength	71
2.10.1	The Wave Character of Particles & de Broglie Wavelength	71
2.10.2	荷電粒子の加速 Accelerating Charged Particles	71
2.10.3	デビソン=ガーマーの実験 Experiment by Davisson and Germer	72
2.10.4	ブラッグの法則 (Bragg's Law)	72
2.10.5	原子および分子の回折 Atomic and Molecular Diffraction	72
2.11	Matter Waves	72
2.11.1	平面波	72
2.11.2	ウェーブパケット (Wave Packets / Wave Trains)	73
2.11.3	重ね合わせの式	73
2.11.4	群速度 (Group Velocity)	73
2.11.5	一定振幅のウェーブパケット (Constant Amplitude Wave Packets)	74
2.11.6	物質波の統計的解釈 (Statistical Interpretation of Matter Waves)	75
2.11.7	測定との関係 (Relation to Measurement)	75
2.12	Heisenbergs Uncertainty Relation	75
2.12.1	Position-momentum uncertainty	75
2.12.2	エネルギーと時間の不確定性 (Energy-time uncertainty)	77
2.13	The Structure of Atoms and the Bohr Model	77
2.13.1	量子力学的安定性とハイゼンベルクの不確定性原理 (Quantum Origin of Stability & Heisenberg's Uncertainty Principle)	78
2.13.2	原子スペクトル (Atomic Spectra)	79
2.13.3	ボーア・モデル (The Bohr Model)	79
2.13.4	ボーア・ゾンマーフェルト・モデル (The Bohr-Sommerfeld Model)	80

2.13.5	フランク・ヘルツの実験 (Franck-Hertz Experiment)	80
2.14	The Schrödinger Equation	81
2.14.1	時間依存シュレーディンガー方程式の導出 (Derivation of Time-Dependent Schrödinger Equation)	81
2.14.2	定常シュレーディンガー方程式 (Stationary Schrödinger Equation)	81
2.14.3	境界条件 (Boundary Conditions)	81
2.14.4	ポテンシャル障壁：ステップ型 (A Potential Barrier / Step)	82
2.15	Potential barriers and wells	83
2.15.1	ポテンシャル障壁とトンネル効果 (Potential Barrier & Tunneling Effect)	84
2.15.2	トンネル効果 (The Tunneling Effect)	84
2.15.3	トンネル効果の応用 (Applications)	84
2.15.4	無限井戸型ポテンシャル (Potential Well with Infinite Depth)	85
2.15.5	有限井戸型ポテンシャル (Potential Well with Finite Depth)	85
2.16	The harmonic oscillator	86
2.17	Angular Momentum and Spherical Potentials	89
2.18	Parametric Downconversion	93
2.18.1	1. パラメトリック下方変換 (Parametric Downconversion: PDC)	93
2.18.2	2. 非線形光学の基礎 (Nonlinear Optics Primer)	93
2.18.3	3. 位相整合条件 (Phase Matching Condition)	93
2.18.4	4. Type-I と Type-II の違い (Type-I vs Type-II PDC)	94
2.18.5	5. 量子もつれ (Quantum Entanglement)	94
2.18.6	6. CHSH 不等式 (CHSH Inequality)	94
2.18.7	まとめ	95
2.19	The Quantum Zeno Effect	95
2.19.1	導入と歴史的背景 (Introduction and Historical Background)	95
2.19.2	理論的枠組みと導出 (Theoretical Framework)	95
2.19.3	対比：偏光の段階的回転 (Gradual Polarization Rotation)	96
2.19.4	断熱発展と段階的測定 (Adiabatic Evolution and Gradual Measurements)	97
2.19.5	実験結果と現在の研究 (Experimental Results and Current Research)	97
2.19.6	応用例：液晶ディスプレイ (Liquid Crystal Displays - LCD)	97

Chapter 1

wave optics

1.1 Law of Reflection

This refers to the principle that the incoming light and outgoing light have a same angle according to the optical axis.

1.2 Fermat's Principle

This is based on that the time taken for a light path to travel should be in the least time, thus:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad (1.1)$$

This will show the law of reflection.

1.3 Law of Refraction (Snell's Law)

This states that:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.2)$$

1.4 Total Internal Reflection

This happens when the incident angle is same or greater than θ_c . θ_c can be calculated by:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.3)$$

And thus this only occurs when $n_2 < n_1$ since the inside arcsin should not be greater than 1.

1.5 Numerical Aperture (NA)

This describes the acceptance angle of optical fibers.

$$\text{NA} = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.4)$$

1.6 Fermat's Principle for Inhomogeneous Media

The Optical Path Length (OPL) is defined as:

$$\text{OPL} = \int_A^B n(r) ds \quad (1.5)$$

And the OPL has to be stationary:

$$\delta \left(\int_A^B n(r) ds \right) = 0 \quad (1.6)$$

Firstly, the differential path length is $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau$.

Now using a new alphabet $L = n(r)\sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}}$:

$$J = \int_{\tau_A}^{\tau_B} L d\tau \quad (1.7)$$

The Euler-Lagrange equation applies:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Which leads to the ray equation:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1.9)$$

Example

アスファルトが熱せられ、地面に近いほど空気が薄く（屈折率 n が低く）、高いほど屈折率が高い状況を考えます。屈折率 $n(y)$ は高さ y だけに依存するとします（ x 方向には一定）。このとき、光線方程式の x 成分はどうなるでしょうか？

$$\frac{d}{ds} \left(n(y) \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1.10)$$

n は x に依存しないので、右辺は 0 です。

$$\frac{d}{ds} \left(n(y) \frac{dx}{ds} \right) = 0 \implies n(y) \frac{dx}{ds} = \text{一定} \quad (1.11)$$

Late

1.7 Mirrors

1.7.1 Plane Mirrors

Magnification of a plane mirror is:

$$M = \frac{h_{\text{image}}}{h_{\text{object}}} \quad (1.12)$$

The sign convention is:

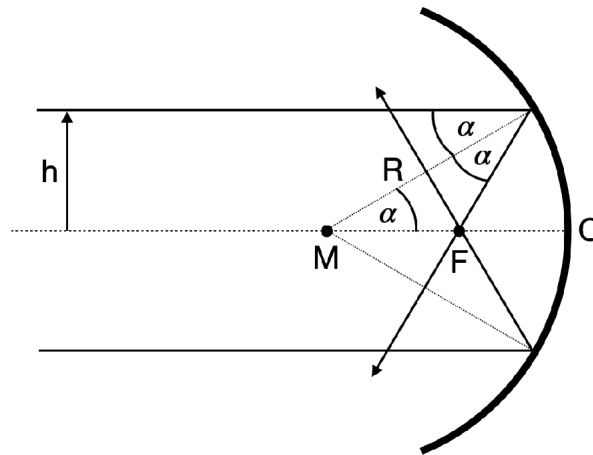
- Plus for upward according to the optical axis
- Minus for downward according to the optical axis

1.7.2 Concave Mirrors

If we define OF as the distance from the intersection of the optical axis and the mirror to the intersection of light paths:

$$OF = R \left(1 - \frac{1}{2 \cos(\alpha)} \right) = f \quad (1.13)$$

And this is the focal length of the concave mirror. R is the radius of the mirror, α is the angle between the optical axis and either of the mirror-light path intersection points.



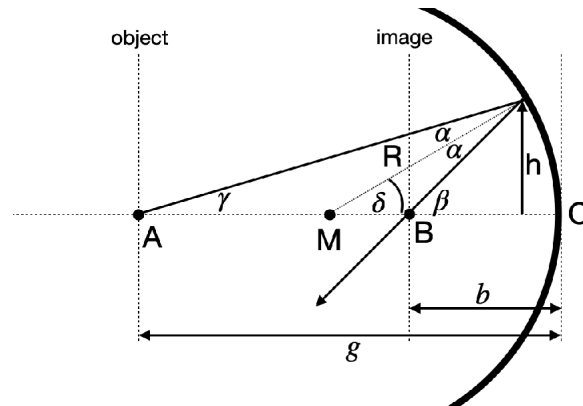
And in the paraxial limit,

$$f = \frac{R}{2} \quad (1.14)$$

Or re-writing

$$f = R \left[1 - \frac{R}{2\sqrt{R^2 - h^2}} \right] \quad (1.15)$$

1.7.3 Imaging Equation & Magnification for concave mirror:



$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \simeq \frac{1}{f} \quad (1.16)$$

The magnification:

$$\frac{h_{image}}{h_{object}} = -\frac{b}{g} = M \quad (1.17)$$

Here

- g is + if the object is on the front of the mirror (where the light comes from)
- g is - if the object is on the back of the mirror
- b is + if the formed image is on the front of the mirror (real image)
- b is - if the formed image is on the back of the mirror (virtual image)
- Negative M means the image is inverted.
- Positive M means the image is upright.

Object Distance	Image Characteristics	Image Position	Magnification
$g > 2f$	Real, inverted, smaller	Between f and $2f$	$ m < 1$
$g = 2f$	Real, inverted, same size	At $2f$	$ m = 1$
$f < g < 2f$	Real, inverted, larger	Beyond $2f$	$ m > 1$
$g = f$	Image at infinity	At infinity	N/A
$g < f$	Virtual, upright, larger	Behind mirror	$ m > 1$

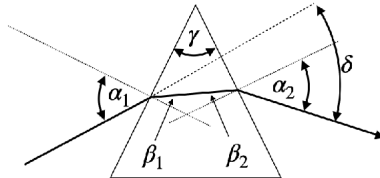
1.7.4 Parabolic Mirrors

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad (1.18)$$

This final equation describes a parabola with its focus at $(0, p)$

1.8 Prism

1.8.1 Deflection Angle



$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = \alpha_1 + \arcsin \left(\frac{n_1}{n_0} \sin \left(\gamma - \arcsin \left(\frac{n_0 \sin \alpha_1}{n_1} \right) \right) \right) - \gamma \quad (1.19)$$

The minimum deflection angle of an **isosceles** prism

$$\delta_{min} = 2\alpha - \gamma \quad (1.20)$$

1.8.2 Dispersion

The refractive index is **Larges at small wave length.**

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \quad \text{Normal dispersion} \quad (1.21)$$

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0 \quad \text{Anomalous dispersion} \quad (1.22)$$

1.8.3 The change of the deflection angle with refractive index

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \sin(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\frac{\gamma}{2})}} \quad (1.23)$$

using

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (1.24)$$

We obtain

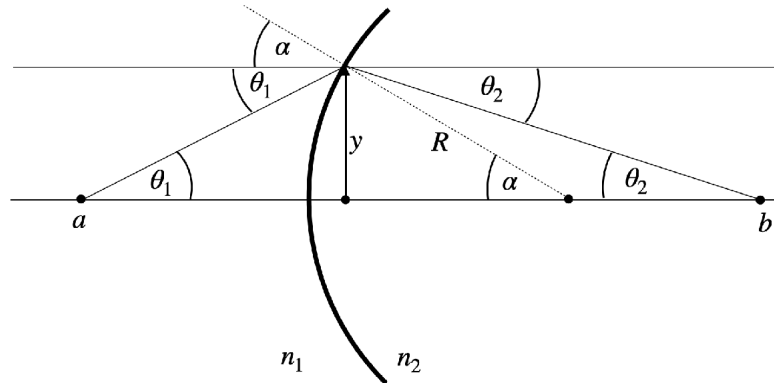
$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\frac{\gamma}{2})}} \frac{dn}{d\lambda} \quad (1.25)$$

The longest wavelength is deflected the least.

1.9 Lenses

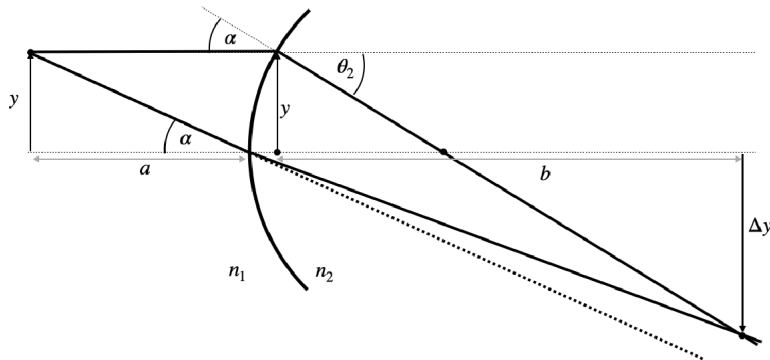
1.9.1 Spherical surface

Light emerging from a point a on the optical axis:



$$\theta_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} y - \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (1.26)$$

which is linear in y and θ_1 .



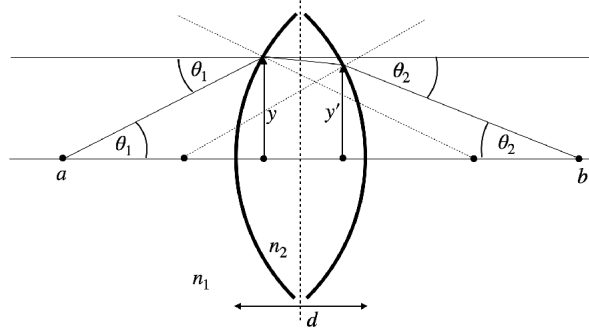
Consider light originating from a point at distance y from the optical axis.

Imaging equation for a curved surface

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f} \quad (1.27)$$

The focal length:

$$f = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \quad (1.28)$$

1.9.2 Thin lens

The simplification used in thin lens theory allows us to treat all refraction as occurring on a single plane, Principle Plane.

Imaging Equation for Thin lens

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \simeq \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (1.29)$$

Lensmaker equation (the focal length of a thin lens)

$$f = \frac{n_2}{(n_2 - n_1)} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.30)$$

1.9.3 Sign convention of a, b, R1, R2 for thin lens & spherical lens**Spherical lens**

- object distance **a** is positive if it is on the side of the incoming light.
- Image distance **b** is positive if it is on the side of outgoing light (so the opposite side of incoming light)
- **b** is negative if it is on the side of incoming light.
- **R** is positive if the center of curvature is on the outgoing light side.
- **R** is negative if the center of curvature is on the incoming light side.

Thin lens

- **a** is positive for the object side (Left, or incoming light side)
- **b** is positive for the image side (Right, or outgoing light side)
- if $b < 0$ then virtual image, if $b > 0$ then real image
- R_1 is positive (if The center of curvature is on the outgoing light side)
- R_2 is negative (if The center of curvature is on the incoming light side)

About f

- $f > 0$ then converging lens (Convex lens ☐)
- $f < 0$ then diverging lens

1.9.4 Bessel's method**Overview**

Bessel's method provides an accurate way to measure the focal length (f) of a converging lens.

Methodology

1. Fix the distance (D) between the object and the screen.
2. Move the lens to find two positions where a sharp image is formed on the screen.
3. Measure the displacement (d) between these two lens positions.

Derivation

Using the thin lens equation and the geometry of the setup:

$$\text{Lens Equation: } \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{Total Distance: } D = a + b$$

where a is the object distance and b is the image distance.

The object distances for the two distinct positions (a_1, a_2) are related to D and d by:

$$a_1 = \frac{D + d}{2} \quad \text{and} \quad a_2 = \frac{D - d}{2}$$

Bessel's Formula

Substituting these values back into the lens equation yields the final formula for the focal length:

$$\boxed{f = \frac{D^2 - d^2}{4D}} \quad (1.31)$$

Advantage

This method is generally more accurate than standard measurements because it eliminates the need to determine the exact object (a) or image (b) distances relative to the optical center of the lens. It only requires measuring the fixed distance D and the lens displacement d .

1.9.5 Magnification of a lens

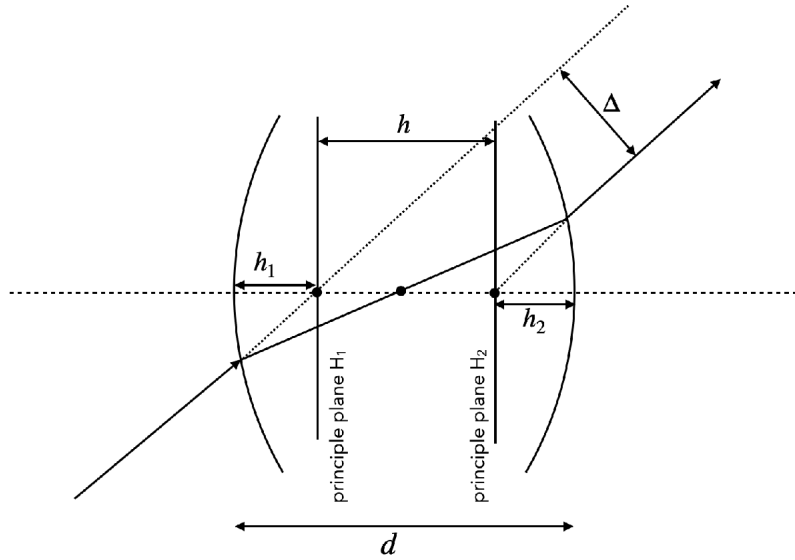
$$M = \frac{h_{\text{image}}}{h_{\text{object}}} = -\frac{b}{a} = \frac{f}{f - a} \quad (1.32)$$

- $M < 0 \implies$ reversed image
- $M > 0 \implies$ upright image

This can be used for **Paraxial approximated cases and Thin lens.**

Object Position	Image Characteristics	Magnification (M)	Image Type
$a < f$	Upright and magnified	$M > 0$	Virtual
$f < a < 2f$	Reversed and magnified	$M < -1$	Real
$a = 2f$	Reversed, same size	$M = -1$	Real
$a > 2f$	Reversed and shrunk	$-1 < M < 0$	Real
$a = f$	Appears at infinity	$M = \infty$	-

1.9.6 Thick lens



Two principle planes.

Matrix Optics

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Free space})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (\text{Planar interface, Refraction at a flat interface})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (\text{Spherical Boundary})$$

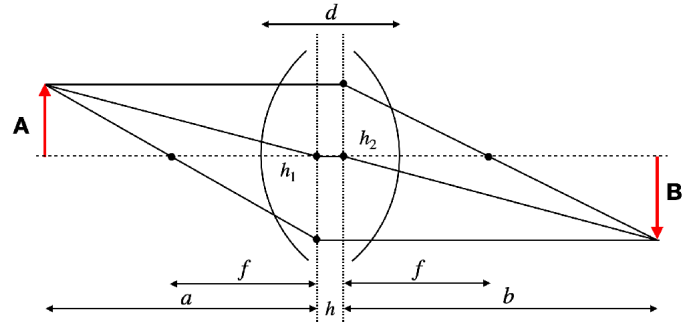
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Thin Lens})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{R_2 n_1} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R_1 n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (\text{Thick Lens})$$

1.9.7 Imaging Equation for thick lens

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{n R_1 R_2} \right) \quad (1.34)$$



The location of the two principle planes:

$$h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nR_2} \tag{1.35}$$

$$h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nR_1} \tag{1.36}$$

Lens type:

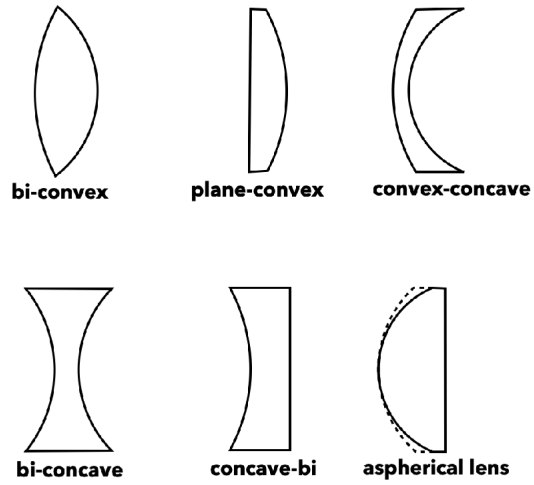
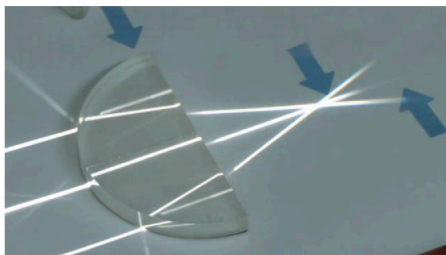


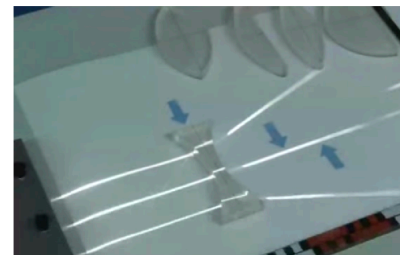
Figure 8: Different lens types.



(a) Convex plane thick

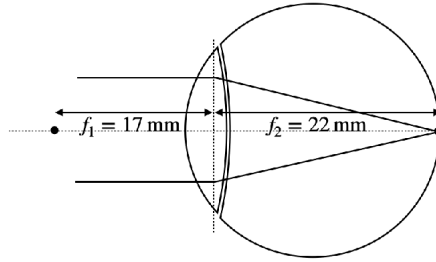


(b) Convex plane thin



(c) Bi-concave lens

1.9.8 Human's eye's refractive power (the unit is diopters(D))



Front focal length : f_1

Back focal length : f_2

$$P = \frac{1}{f} = 1/0.22m \simeq 45.45D \quad (1.37)$$

1.9.9 Resolution Limit of the eye

The resolution of the eye is limited by diffraction and the spacing of photoreceptors.

the Minimum angle of resolution:

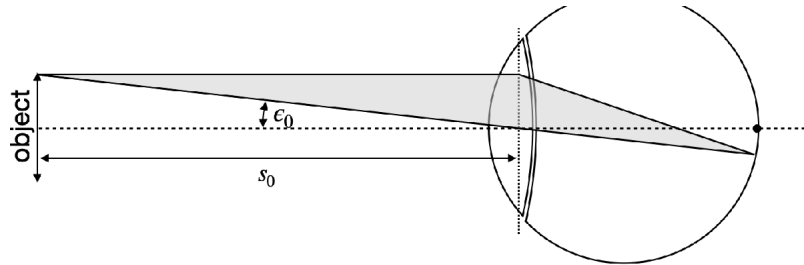
$$\theta_{min} \simeq \frac{1.22\lambda}{D} \quad (1.38)$$

D is the diameter of the pupil.

$$s_0 = 25cm \quad \text{This is the "range of clear visual sight"} \quad (1.39)$$

objects within this range can be observed under a visual angle ϵ_0

$$\epsilon_0 \simeq \tan(\epsilon_0) = \frac{h}{s_0} \quad (1.40)$$



1.9.10 Evaluating the refractive error

refractive error R :

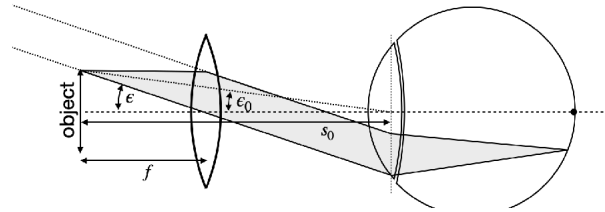
$$R = \frac{1}{f_{required}} - \frac{1}{f_{actual}} \quad (1.41)$$

1.9.11 Angular magnification

角倍率 V は、近点において裸眼で見た対象物が占める角度 (ϵ_0) と、装置を通して見た像が占める角度 (ϵ) の比として定義される。

$$V = \frac{\tan(\epsilon)}{\tan(\epsilon_0)} \simeq \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.42)$$

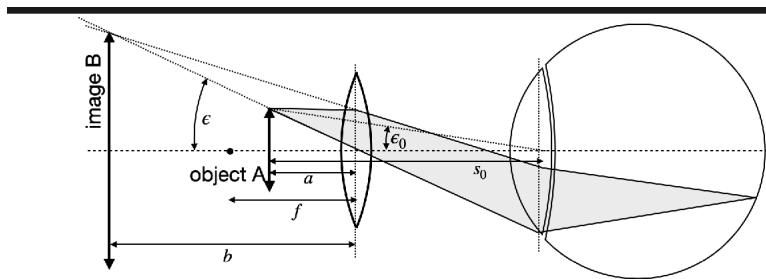
1.9.12 Magnifying glass



the angular magnification (A is the object size)

$$V = \frac{\tan(\epsilon)}{\tan(\epsilon_0)} \simeq \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{A s_0}{f A} = \frac{s_0}{f} \quad (1.43)$$

the angular magnification of the virtual image:



$$V = \frac{B s_0}{b A} = \frac{s_0}{a} \quad (1.44)$$

Using the imaging equation $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$V = \frac{s_0(b-f)}{bf} \quad (1.45)$$

1.9.13 Two lens system

The total f for two **thin lens system**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} \quad D \text{ is the separation distance of the two lenses} \quad (1.46)$$

The total Magnification **This applies to all types of lens**

$$M_{total} = M_1 M_2 \quad (1.47)$$

1.9.14 The magnification of lens - eyepiece system

$$V = \frac{f_{lens}}{f_{eyepiece}} \quad (1.48)$$

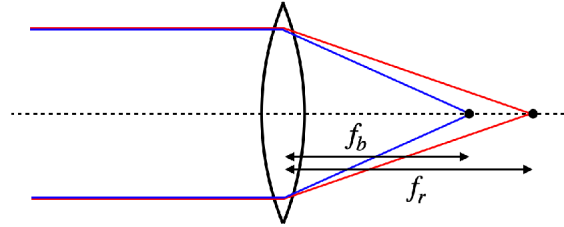
1.9.15 Light Gathering power

A telescope with an aperture diameter D collects light proportional to $\frac{\pi D^2}{4}$

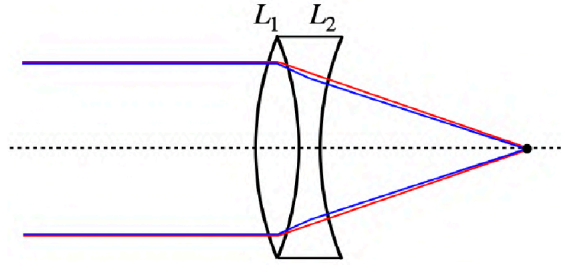
1.10 Imaging errors

1.10.1 Chromatic Aberration

Chromatic Aberration are based on the fact that light of different color has a different speed of propagation and thus also a different refractive index. As the refractive index for shorter wavelength is typically higher, we expect that the blue color has a shorter focal distance than the red color.



This may be corrected by using a system of two lenses as below (Achromatic lenses). Achromatic lenses are constructed by combining two lenses with different optical properties. Biconcave lens has higher dispersion.



For a system of two lenses in contact:

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1)\rho_1 + (n_2 - 1)\rho_2 \quad (1.49)$$

And we require two of this (red and blue light) to be identical. After some calculation:

$$\frac{R_2}{R_1} = 1 + 2 \frac{V_2(n_{1r} - 1)}{V_1(n_{2r} - 1)} \quad (1.50)$$

1.10.2 Spherical aberration

The spherical aberration arises due to the fact that we have always considered a simplification of the angular functions to their first order Taylor series expansion. An optical aberration where rays passing through a lens at different distances from the optical axis focus at different points along the axis, with rays through the outer regions of the lens focusing closer to the lens than rays passing near the center.

1.10.3 Field Curvature

1. Basic Phenomenon: Curved Image Plane

We usually expect a flat object to form a sharp image on a flat sensor. However, due to this aberration, the focal points form a curved surface rather than a flat plane.

2. Cause: Relation to Spherical Aberration

This is linked to how focal length changes based on the height h of rays from the optical axis. Because the rays do not meet on a single flat plane, the image surface becomes curved. This specific curved surface is called the Petzval surface.

3. Meridional vs. SagittalMeridional:

Rays passing through the vertical cross-section of the lens (the plane containing the optical axis and the object point).Sagittal: Rays passing through the horizontal cross-section (the plane perpendicular to the meridional plane).

1.10.4 Coma

1. When it occurs (Conditions) This aberration occurs with off-axis rays (light entering at an angle) rather than parallel rays. It primarily affects objects located away from the center of the image.
2. Appearance Light fails to converge into a single point. Instead, it forms a comet-shaped blur with a bright head and a diffuse tail (hence the name "coma").
3. Cause Rays passing through the edges (periphery) of the lens experience a different magnification compared to those passing through the center.
4. Severity The effect worsens with increased distance from the optical axis and larger apertures. It is particularly problematic for wide-angle or large-aperture lenses.

1.10.5 Astigmatism

An optical aberration where rays from an off-axis point source focusing in two perpendicular planes (meridional and sagittal) have different focal lengths, resulting in image points that appear as ellipses oriented either horizontally or vertically, depending on the observation plane.

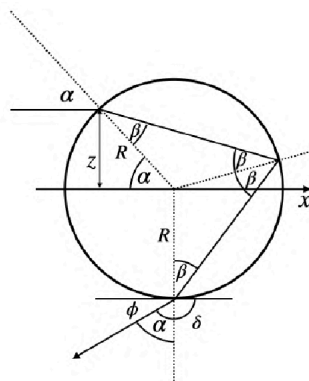
1.10.6 Cushion Distortion

Cushion Distortion (also called Pincushion Distortion) - An optical aberration where straight lines appear to bow inward toward the center of the image, like the sides of a cushion or pincushion. This type of distortion is typically seen in telephoto lenses and makes the center of the image appear to be pinched inward.

1.10.7 Barrel Distortion

Barrel Distortion - An optical aberration where straight lines appear to bow outward from the center of the image, like a barrel shape. This type of distortion is common in wide-angle lenses and makes the center of the image appear to bulge outward.

1.11 Rainbow, single drop analysis



$$\phi = 4\beta - 2\alpha \quad (1.51)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_{air}}{n_{water}} \sin(\alpha)\right) \quad (1.52)$$

$$\phi = 4 \arcsin\left(\frac{n_{air}}{n_{water}} \sin(\alpha)\right) - 2\alpha \quad (1.53)$$

The color of the rainbow is the result of the fact that the maximum deflection angle depends on the color of the light due to the dispersion. Rainbows form because light rays cluster at specific maximum deflection angles, creating intensity peaks for each color. While the interior appears white due to overlap, these peaks separate the colors at distinct viewing angles (e.g., red at 42°) for the observer.

1.11.1 Primary and Secondary Rainbows

Primary rainbows result from a single internal reflection, while secondary rainbows involve two, causing them to be dimmer and have reversed colors. The dark region separating the two bows is known as Alexander's dark band.

1.12 Wave Optics

1.12.1 Wave equation

What is wave? A wave corresponds to a physical quantity which oscillates in space and time. Its energy current density is related to the square magnitude of the amplitude.

Wave equation

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.54)$$

Where the laplace operator ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.55)$$

The wave equation is a linear differential equation, which implies that the superposition principle holds. If u_1 and u_2 are solutions of the wave e.q., then any linear combination

$$u(\mathbf{r}, t) = \alpha_1 u_1(\mathbf{r}, t) + \alpha_2 u_2(\mathbf{r}, t) \quad (1.56)$$

is also a solution.

1.12.2 Monochromatic wave

It consists of a single frequency ω , no phase disturbances, and infinite in time.

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi(r)) \quad (1.57)$$

The wave can be represented in complex form: (Complex wave function)

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i(\omega t + \phi(r))} = U(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (1.58)$$

The complex wave function satisfies the same wave equation.

The Helmholtz equation, which describes the spatial behavior of monochromatic wave

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.59)$$

where $k = \frac{\omega}{c}$ is the wave number. Complex-real wavefunction Relation

$$u(\mathbf{r}, t) = REU(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)] \quad (1.60)$$

1.12.3 Intensity of waves

$$I(\mathbf{r}, t) = 2 \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1.61)$$

I has the unit of $\frac{W}{m^2}$ Or

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2 \quad (1.62)$$

1.12.4 Optical Power P of a wave

$$P = \int_A I(\mathbf{r}, t) dA \quad (1.63)$$

1.12.5 Wave fronts

They are surfaces in space where the phase is constant.

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (1.64)$$

Typically, this constant is chosen to represent points of maximum spatial amplitude

$$\phi(\mathbf{r}) = 2\pi q \quad q \text{ is an integer} \quad (1.65)$$

The direction normal to these wavefronts

$$\mathbf{n} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (1.66)$$

\mathbf{n} points in the direction of wave propagation

1.12.6 Plane waves

A plane wave represents a fundamental solution of the homogeneous wave equation. In its complex form, it is expressed as:

$$U(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{i\omega t} \quad (1.67)$$

The wavefront of a plane wave:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 2\pi q + \text{arg}(A) \quad (1.68)$$

In the vacuum, the wave vectore $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ is real valued.

$$\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

1.12.7 Dispersion Relation

A plane wave is defined as $U(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. The phase ϕ is:

$$\phi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

To find the velocity, we differentiate the phase with respect to time and set it to zero ($\frac{d\phi}{dt} = 0$):

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \omega - \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Solving for the velocity $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$ along the direction of propagation (\vec{k}):

$$v = \frac{\omega}{k}$$

For light in a vacuum ($v = c_0$), we obtain the dispersion relation:

$$\omega = c_0 k$$

1.12.8 In a Medium

The frequency doesn't change, but

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad k = nk_0 \quad (1.70)$$

1.12.9 Snells law

$$n_1 k_0 \sin\theta_1 = n_2 k_0 \sin\theta_2 \quad (1.71)$$

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \quad (1.72)$$

which means that the component of the wavevector parallel to the interface is conserved.

1.12.10 Spherical waves

Wavefronts forming spherical surfaces, $|\mathbf{k}||\mathbf{r}| = kr = \text{const.}$

Source at \mathbf{r}_0

$$U = \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{i\omega t} \quad (1.73)$$

the $1/(r - r_0)$ is for energy conservation.

The intensity follows a $1/r^2$ law.

1.13 Interference

When two wave solutions $U_1(\mathbf{r}), U_2(\mathbf{r})$, their superposition gives:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) \quad (1.74)$$

The intensity:

$$\begin{aligned} I &= |U|^2 \\ &= |U_1 + U_2|^2 \\ &= |U_1|^2 + |U_2|^2 + U_1^* U_2 + U_1 U_2^* \end{aligned}$$

Individual intensity: $I_i = |U_i|^2$

Complex wave amplitude in polar form, separating its magnitude and phase:

$$U_i = \sqrt{I_i} e^{i\phi_i} \quad (1.75)$$

The total intensity: **(Interference formula)**

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (1.76)$$

The last term is so called the interference term, which can be positive or negative.

If $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (1.77)$$

- Maximum intensity at $\Delta\phi = 2\pi n$, **Constructive interference**
- Zero intensity at $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$, **Destructive interference**

1.13.1 Phase difference related to path difference between two waves.

$$\Delta\phi = k\Delta s + \Delta\phi_0 \quad (1.78)$$

ΔS represents the OPL!!!

$$k\Delta s = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \quad (1.79)$$

1.13.2 Coherence

1. Basic Formula for Phase Difference

$$\Delta\phi = k\Delta s + \Delta\phi_0$$

Meaning: Determines the "phase shift ($\Delta\phi$)" between two waves. Terms: $k\Delta s$: Shift due to optical path difference (k : wavenumber, Δs : distance difference). $\Delta\phi_0$: Initial phase shift at the source. Key Point: For stable interference (Coherence), $\Delta\phi$ must remain stationary over time.

2. Time Evolution of Phase Difference (Frequency Mismatch)

$$\Delta\phi = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)(t - t_0)$$

Meaning: If frequencies (ν_1, ν_2) differ, the phase difference drifts over time, disrupting stability.

3. Definition of Frequency Bandwidth

$$\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2$$

$$\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2$$

Meaning: Defines two frequencies separated by a bandwidth $\Delta\nu$ around a center frequency ν_0 .

4. Phase Drift Relation

$$\Delta\phi = 2\pi\Delta\nu\Delta t$$

Meaning: The phase shift $\Delta\phi$ is proportional to the bandwidth $\Delta\nu$ and elapsed time Δt . A broader spectrum causes faster dephasing.

5. Coherence Time

$$\tau_c = \Delta t = \frac{1}{\Delta\nu}$$

Meaning: The time limit τ_c during which the wave remains synchronized. Logic: Defined as the time required for $\Delta\phi$ to drift by 2π . Larger $\Delta\nu$ (e.g., white light) results in a shorter τ_c .

6. Coherence Length

$$L_c = c\tau_c$$

Meaning: The maximum distance over which the wave maintains coherence (phase correlation).

1. Temporal Coherence

- **Definition:** Phase correlation of a wave with itself at different times.
- **Key Factor:** Spectral purity (bandwidth $\Delta\nu$).
- **Formula:** $\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu}$ (Coherence time is inversely proportional to bandwidth).
- **Properties:** High for monochromatic light (single frequency); low for broad spectrum sources (e.g., thermal light).

2. Spatial Coherence

- **Definition:** Phase correlation between distinct points in space.
- **Key Factor:** Physical size of the source.
- **Properties:** High for point sources (size ≈ 0); low for extended sources (e.g., fluorescent lights).

1.13.3 Interferometers

The phase difference between two light beams:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1L_1 - n_2L_2) \quad (1.80)$$

L_1 L_2 are the physical path lengths

Constructive interference (bright fringes):

$$\Delta\phi = 2\pi m \quad \text{where } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.81)$$

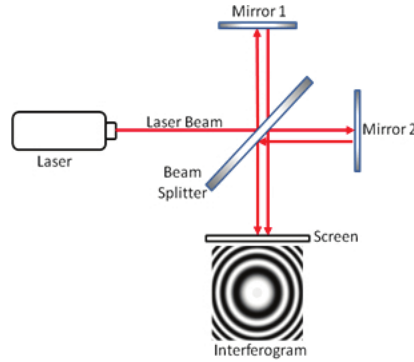
interference (dark fringes):

$$\Delta\phi = (2m + 1)\pi \quad \text{where } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.82)$$

To obtain stable interference fringes, the "coherence" (the degree of phase correlation) of the light is crucial. The optical path difference (OPD) between the two light beams must be shorter than the coherence length of the light source.

- **Laser:** Highly suitable as an interferometer light source due to its long coherence length (ranging from several meters to several kilometers).
- **White Light:** Generally unsuitable except for specific applications because its coherence length is extremely short (only a few micrometers).

1.13.4 Michelson Interferometer



The optical path difference:

$$2(L_2 - L_1) \quad (1.83)$$

the distance from the beam splitter to the fixed mirror as L_1 and the distance to the movable mirror as L_2

The phase difference

$$\Delta\phi = \frac{4\pi(L_2 - L_1)}{\lambda} \quad (1.84)$$

Measurement of Gas Refractive Index with Michelson Interferometer

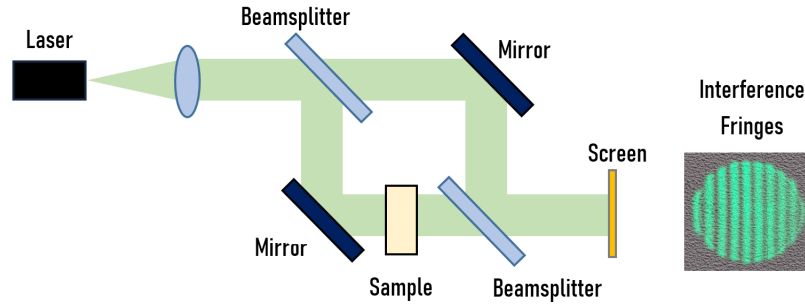
- **Objective:** To measure the refractive index of a gas.
- **Principle:** The interferometer detects changes in *optical path length* caused by variations in refractive index, rather than geometric distance.
- **Setup:** A transparent gas cell of length L is placed in one arm. Gas (n_{gas}) is injected into the initially evacuated cell ($n_{vacuum} = 1$).
- **Path Length Change:** The presence of gas increases the optical path. Since light traverses the cell twice, the total change is $2(n_{gas} - 1)L$, resulting in a fringe shift.
- **Calculation:** The refractive index is determined by the formula:

$$n_{gas} = 1 + \frac{m\lambda}{2L}$$

Where:

- m : Number of shifted bright fringes
- λ : Wavelength of the light source
- L : Length of the gas cell
- **Example:** With a HeNe laser ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) and a 10 cm cell, a shift of 20 fringes yields $n \approx 1.000063$.
- **Applications:** Its high sensitivity to pressure, temperature, and composition makes it ideal for gas sensing and environmental monitoring.

1.13.5 Mach-Zehnder Interferometer



$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1L_1 - n_2L_2) \quad (1.85)$$

1.13.6 Application: Electro-Optic Modulators in Photonic Integrated Circuits

Pockels effect

$$\Delta n = \frac{-1}{2}n^3rE \quad (1.86)$$

E is the external field

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta nL \quad (1.87)$$

1.13.7 Sagnac Interferometer

Basic Principles and Characteristics While Michelson interferometers and Mach-Zehnder interferometers detect "differences" in optical path length or refractive index, the Sagnac interferometer is specialized for detecting "rotation".

Main Applications Due to this unique characteristic, it is used as the fundamental technology for high-precision fiber optic gyroscopes employed in aircraft, spacecraft attitude control, autonomous driving systems, and similar applications.

Mechanism (Light Path) A light beam is split into two parts, which travel in opposite directions—clockwise and counterclockwise—along the same closed loop path, and are recombined after completing one circuit.

Rotation Detection Mechanism When the interferometer is stationary, both light beams travel exactly the same distance. However, when the interferometer itself is rotating, the light traveling in the same direction as the rotation must travel a longer distance because the goal (recombination point) is moving away, while the light traveling in the opposite direction travels a shorter distance. Rotation is measured by utilizing the change in interference caused by this effective path difference.

1.13.8 Derivation and Application in Fiber-Optic Gyroscopes

1. Derivation: Time Difference

Counter-propagating beams in a rotating loop experience a time difference due to the rotation:

$$\Delta T = \frac{4A\Omega}{c^2}$$

where A is the area, Ω is the angular velocity, and c is the speed of light.

2. Sagnac Effect: Phase Shift

This time difference translates into a phase shift, which is the fundamental principle of rotation sensing:

$$\Delta\phi = \frac{8\pi A\Omega}{\lambda c}$$

The shift is proportional to the area (A) and rotation speed (Ω), and inversely proportional to wavelength (λ) and light speed (c).

3. Key Insight: Shape Independence

The sensitivity depends *only* on the enclosed area A . The specific shape of the loop (circular, square, or irregular) does not matter.

4. Practical Implementation

To enhance sensitivity, fiber is wound into a coil with N turns. This multiplies the effective area:

$$A = N \cdot A_0$$

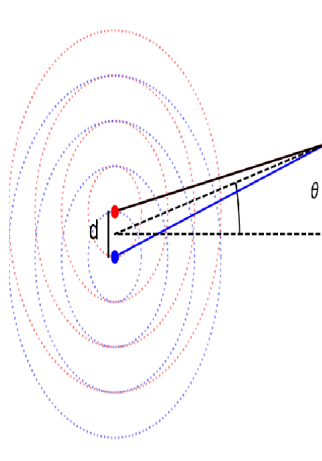
Modern devices use thousands of turns to detect minute rotations.

5. Advantages and Applications

Fiber-optic gyroscopes have no moving parts, are robust against temperature and vibration, and offer high sensitivity. They are essential for inertial navigation in aircraft and spacecraft.

1.14 Double Slit Interference

1.14.1 Two point sources



The Fraunhofer Approximation (Far field $L \gg d$ and $L \gg y_p$)

$$\text{Path difference } \Delta s = d \sin(\theta) \quad (1.88)$$

$$\text{Phase difference } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta) \quad (1.89)$$

- d is the separation between the two slits
- θ is the angle from the central axis to the observation point

The exact path difference

$$\Delta s = r_2 - r_1 = \sqrt{L^2 + (y_p + \frac{d}{2})^2} - \sqrt{L^2 + (y_p - \frac{d}{2})^2} \quad (1.90)$$

- L is the screen distance
- y_p is the height of the observed point.

1.14.2 INterference Conditions for buouble slit

Bright fringes, constructive interference

$$\sin(\theta_m) = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.91)$$

Destructive fringes

$$\sin(\theta_m) = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.92)$$

- $m = 0$ order is the central maximum, $\theta = 0$
- The angular spacing between fringes scales as $\frac{\lambda}{d}$

1.14.3 Intensity Distribution

The screen is at distance L from the slits.

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{L}\right) \quad (1.93)$$

y is the position on the screen from the center. For small angle $y \ll L$,

$$\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) = \frac{y}{L} \quad (1.94)$$

The total intensity at any point on the screen

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta)\right) \quad (1.95)$$

When $I_1 = I_2 = I_0$

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\theta)\right) \quad (1.96)$$

\implies Maximum Intensity is $4I_0$ and minimum $I_{min} = 0$

1.14.4 Resolution

Rayleigh Criterion, Angular resolution

$$\theta_{min} = \frac{1.22\lambda}{D} \quad D \text{ is the diameter of the aperture} \quad (1.97)$$

Abbe Diffraction limit, Spatial resolution

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2n \sin(\theta)} = \frac{\lambda}{2NA} \quad (1.98)$$

NA is the numerical aperture $n \sin(\theta)$, and θ is half-angle of the cone of light collected by the objective

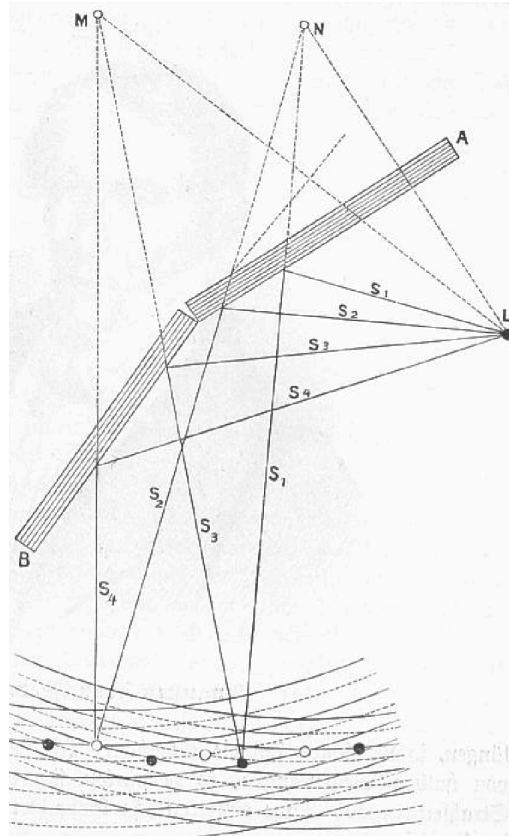
Too improve resolution

- Smaller wavelength
- Larger Apertures d
- Higher NA

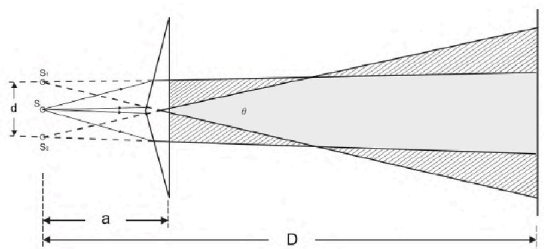
- Rayleigh Criterion is used for telescope, Camera. It measures the angle
- Abbe Diffraction limits is used for microscope. and for observing virus/micro stuffs, knowing the resolution in spatial term (like nano meters) is more preferred.

1.14.5 Fresnel Double Mirror

Fresnel double mirror experiment uses two tilted plane mirrors to create virtual images of a light source, producing an interference pattern on a screen. It makes two coherent sources from a single original source.

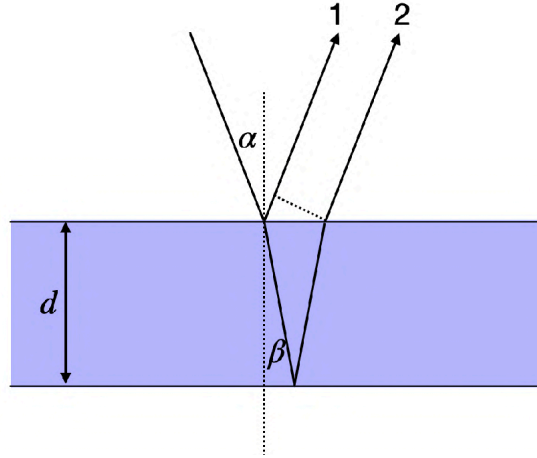


1.14.6 Fresnel Biprism



The Fresnel biprism creates two coherent light sources by refracting light from a single source through two thin prisms joined at their bases. This elegant experiment demonstrates the wave nature of light, as the wave propagates through both paths of the biprism, interfering with itself.

1.14.7 Basic Principle of Thin Film Interference



The path difference

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{2n_2d}{\cos(\beta)} - 2d \tan(\beta) \sin(\alpha) \\ &= \frac{2nd}{\cos(\beta)} - \frac{2nd \sin^2(\beta)}{\cos(\beta)} \\ &= 2nd \cos(\beta) = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}\end{aligned}$$

General phase difference for thin films

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s + \pi \quad (1.99)$$

Where $\Delta s = \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$, d is the film thickness, α is the incident angle.

1.14.8 Normal incidence : $\alpha = 0$

$$\text{The path difference } \Delta s = 2nd \quad (1.100)$$

$$\text{The phase difference } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2dn + \pi = \frac{4\pi nd}{\lambda} + \pi \quad (1.101)$$

- For constructive interference $\Delta\phi = 2\pi m$, where $m = 1, 2, 3, \dots$
- For destructive interference $\Delta\phi = (2m - 1)\pi$, where $m = 1, 2, 3, \dots$

1.14.9 Thickness for constructive interference

$$d = \frac{2m - 1}{4n} \lambda \quad (1.102)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

Minimum thickness for constructive interference Setting $m = 1$, gives $d = \frac{\lambda}{4n}$, known as quarter wave film.

1.14.10 Fixed thickness, understanding colored films

Wavelengths showing Constructive interference

$$\lambda_{max} = \frac{4nd}{2m - 1} \quad (1.103)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$, determines which wavelengths are enhanced.

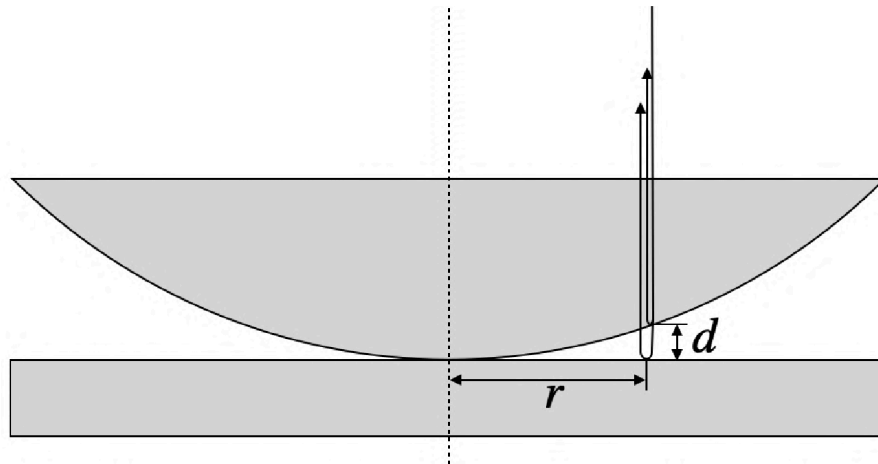
1.14.11 Anti-Reflection Coating

$$n_{air} < n_{coating} < n_{glass} \quad (1.104)$$

and

$$d = \frac{\lambda}{4n_{coating}} \quad (1.105)$$

1.14.12 Newton Rings



Refraction at the curved surface does deflect the beam slightly, but if we stay close to the axis of the spherical surface (where $r \ll R$, with R being the radius of curvature), we can neglect this effect

$$\Delta s = 2d + \frac{\lambda}{2} \quad (1.106)$$

For destructive, dark rings

$$\Delta = \frac{2m + 1}{2} \lambda = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

$$2d = m\lambda$$

at $d=0, m=0$ we observe dark spot at the center where the surfaces touch $m = 0, 1, 2, 3$

$$r^2 = d(2R - d) \quad (1.107)$$

since $d \ll R$, $r^2 \simeq 2dR$

$$d = \frac{r^2}{2R} \quad (1.108)$$

Newton Rings Formula The radius of the m -th dark ring:

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (1.109)$$

1.14.13 Multiple Wave Interference with Constant Amplitude

Consider M waves, each with the same amplitude but with successive phase differences. The total amplitude

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_M \quad (1.110)$$

Neighboring waves have a constant phase difference $\Delta\phi$. The p -th wave amplitude

$$U_p = \sqrt{I_0} e^{i(p-1)\Delta\phi} \quad (1.111)$$

$p = 1, 2, \dots, M$.

The total amplitude:

$$U = \sqrt{I_0}(1 + h + h^2 + \dots + h^{M-1}) = \sqrt{I_0} \frac{1 - h^M}{1 - h} = \sqrt{I_0} \frac{1 - e^{iM\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} \quad (1.112)$$

Multiple Beam Interference Formula, Equal amplitudes

$$I = I_0 \frac{\sin^2(M\Delta\phi/2)}{\sin^2(\Delta\phi/2)} \quad (1.113)$$

First minimum at $\Delta\phi = \frac{2\pi}{M}$. As M increases, the peaks become sharp, well defined, and narrow.

The first minimum occurs at an angle given by:

$$\sin(\theta_{\text{minimum}}) = \frac{\lambda}{Md} \quad (1.114)$$

This is why diffraction gratings can resolve spectral lines that are extremely close in wavelength—a capability essential for spectroscopy

1.14.14 Application: Diffraction Gratings

回折格子は、光を成分（波長）ごとに分けるための最も重要な光学素子の一つです。

間隔 d で並んだ数千本の平行なスリット（溝）に光を当てます。それぞれのスリットから出る光が干渉し合い、特定の角度に鋭く明るい光（スペクトル線）を作り出します。この角度は次の式で決まります：

$$\sin(\theta_m) = \frac{m\lambda}{d}$$

（ここで、 m は次数、 λ は波長、 d はスリット間隔です）

重要な性質（分解能）：スリットの総数 M が多いほど、光のピークは鋭くなります。これにより、ごくわずかに波長の異なる光同士を見分ける能力（分解能, Resolving Power R ）が高まります。

$$R = mM$$

異なる周波数を持つ M 個の波の干渉ここでは、話を「空間（スリットの並び）」から「時間（周波数の並び）」に置き換えて考えています。設定：振幅は同じですが、周波数が少しずつ（ $\Delta\nu$ ずつ）異なる M 個の波があるとします。

$$U_p(t) = U_0 e^{i2\pi(\nu_0 + (p-1)\Delta\nu)t}$$

これらの波をすべて足し合わせると、 $(I = I_0 \frac{\sin^2(\pi M \Delta\nu t)}{\sin^2(\pi \Delta\nu t)})$ の形が時間軸上に現れます。強度は一定ではなく、時間とともに振動します。すべての波の位相が揃う瞬間（ $t = \text{integer}/\Delta\nu$ ）に、非常に強いパルス状のピークが発生します。極めて短いパルス光を作る **モード同期レーザー（Mode-locked lasers）** や、光周波数コムといった先端技術に使われています。

1.14.15 Wavevector Representation: A Powerful Geometric Insight

一般的な回折格子の式 $d \sin \theta = \lambda$ を、波数 k を使って書き換えます。 k (光の波数ベクトル) : 光の波長に対応 ($k = 2\pi/\lambda$) K (格子の波数ベクトル) : 格子の溝の間隔 d に対応 ($K = 2\pi/d$) これにより、式はシンプルな $k \sin \theta = K$ という形になります。これは、「光の波数の垂直成分が、格子の波数と一致する」ことを意味します。

1.14.16 Multiple Wave Interference with Decreasing Amplitude

Multiple Beam Interference and Airy Function

When light reflects repeatedly within a cavity (such as a partial reflector), the amplitude decreases with each reflection due to transmission. Letting the initial amplitude be $U_1 = \sqrt{I_0}$, the second wave U_2 is expressed as:

$$U_2 = hU_1$$

where h is the coefficient defined as:

$$h = re^{i\Delta\phi}$$

Here, $|h| = r < 1$ represents the reflection coefficient, and $e^{i\Delta\phi}$ is the phase factor due to the optical path difference.

Intensity and Energy Conservation

While amplitude scales by r , intensity I scales by r^2 :

$$I_2 = |U_2|^2 = |hU_1|^2 = r^2 I_1$$

Defining Reflectance as $R = |r|^2$ and Transmittance as T , energy conservation (assuming no absorption) implies:

$$R + T = 1$$

Superposition and the Airy Function

Summing the infinite series of reflected waves ($U_3 = h^2U_1, \dots$):

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sqrt{I_0}(1 + h + h^2 + \dots)$$

Taking the limit as the number of reflections $M \rightarrow \infty$, the geometric series sum yields:

$$U = \frac{\sqrt{I_0}}{1 - h} = \frac{\sqrt{I_0}}{1 - re^{i\Delta\phi}}$$

The total intensity $I = |U|^2$ is calculated as:

$$I = |U|^2 = I_0 \frac{1}{|1 - re^{i\Delta\phi}|^2} = \frac{I_0}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\Delta\phi/2)}$$

Rearranging this gives the **Airy Function**:

$$I = I_{max} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{F}{\pi}\right)^2 \sin^2(\Delta\phi/2)}$$

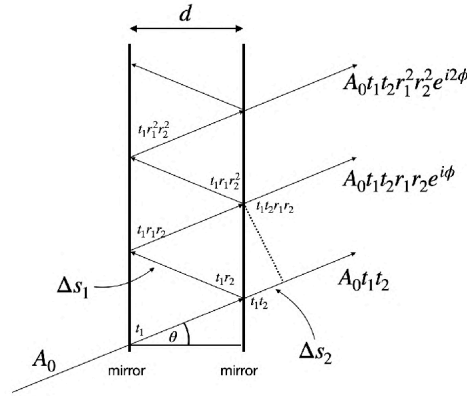
where the parameters are defined as:

$$\text{Max Transmission Intensity: } I_{max} = I_0 \frac{1}{(1 - r)^2}$$

$$\text{Finesse: } F = \frac{\pi\sqrt{r}}{1 - r}$$

Finesse F is a critical metric for cavity performance. As the reflectivity r approaches 1, F increases, causing the transmission peaks to become extremely sharp (narrow bandwidth).

1.14.17 Fabry Perot Interferometer



Light with amplitude A_0 enters, the first transmitted wave has amplitude:

$$U_1 = A_0 t_1 t_2 \quad (1.115)$$

t_1, t_2 are the transmission coefficients of the first and second mirror. The second one:

$$U_2 = A_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i\phi} = U_1 r_1 r_2 e^{i\phi} \quad (1.116)$$

The phase shift between successive reflection:

$$\phi = \frac{2\pi \Delta s}{\lambda} = \frac{2\pi 2d \cos(\theta)}{\lambda} \quad (1.117)$$

$r = r_1 r_2$ The resulting intensity Distribution

$$I = |U|^2 = \frac{I_0}{|1 - r e^{i\phi}|^2} = \frac{I_0}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\theta)\right)} \quad (1.118)$$

1.14.18 Finesse and Spectral Properties

$$F = \frac{\pi \sqrt{r}}{1 - r}$$

ここで、 $r = r_1 r_2$ は 2 つの鏡の反射係数の積です。意味: 反射率 (r) が 1 に近づくほどフィネス F の値は大きくなります。フィネスが高いほど、干渉によって生じる透過光のピークが鋭く (シャープに) なります。

光が鏡の間を往復する際に生じる位相のずれと、光が強め合う条件です。位相差の式 (垂直に入射する場合 $\theta = 0$):

$$\Delta\phi = \frac{4\pi d}{\lambda}$$

ここで d は鏡の間の距離、 λ は波長です。強め合う条件: 透過光が最大になる (強め合う) のは、位相差が 2π の整数倍になるときです。

$$\Delta\phi = m2\pi$$

(m は整数) その時の波長: 上記の条件から、透過ピークとなる波長 λ_m は次のように求められます。

$$\lambda_m = \frac{2d}{m}$$

Free Spectral Range: FSR 隣り合う透過 (Transmission) ピーク同士の間隔のことです。これは波長、または周波数のどちらでも表現できます。波長で表す場合: あるピーク (m 番目) と次のピーク ($m+1$ 番目) の波長の差です。

$$\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{\lambda_m}{m+1}$$

周波数で表す場合: 周波数での間隔は一定になります。

$$\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2d}$$

FSR は、干渉計が次の次数の光と混ざることなく、異なる波長を区別できる範囲を示します。

Spectral Resolution 光のピークの幅 (半値全幅: FWHM) に基づいて、どれくらい細かい波長の違いを見分けられるかを示します。

強度の式: 半値 (最大強度の半分) になるときの強度比は以下の式で表されます。

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{F}{\pi}\right)^2 \Delta\phi_{1/2}^2}$$

周波数幅 (FWHM) の導出: 近似を用いて計算すると、ピークの周波数幅 $\Delta\nu$ は次のように求まります。

$$\Delta\nu = \frac{c}{2dF} = \frac{\delta\nu}{F}$$

これは、FSR ($\delta\nu$) をフィネス (F) で割ったものがピークの幅になることを意味します。

フィネスは、「ピークの間隔」と「ピークの幅」の比率として定義し直すことができます。(The spectral resolution of a Fabry-Perot interferometer is determined by the width of the interference peaks) フィネスの定義式:

$$F = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

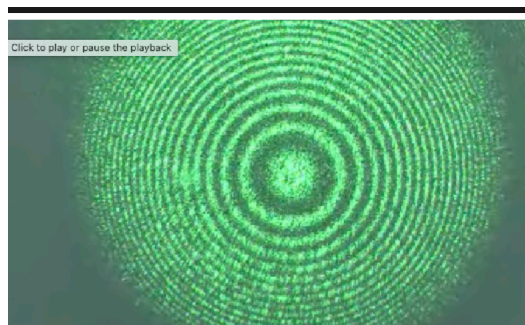
Resolving Power 干渉計全体の総合的な分解能力 R です。式の形:

$$R = mF$$

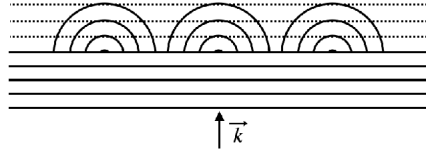
ここで m は干渉の次数、 F はフィネスです。意味: この値が大きいほど、非常に近い波長の光同士を別々のものとして見分ける能力 (分解能) が高いことを意味します。

1.14.19 Ring Pattern Formation

When a Fabry-Perot interferometer is used with an extended monochromatic light source and appropriate optics, it produces a characteristic ring pattern:



1.14.20 Huygens Principle



every point on a wavefront acts as a source of secondary spherical wavelets that spread out in the forward direction

This principle provides a powerful method for analyzing wave propagation and explains various wave phenomena such as reflection, refraction, and diffraction.

this phenomenon can be described using our earlier treatment of multi-wave interference. Consider M spherical wave sources arranged along the x -axis at $z=0$, each separated by a small distance d from its neighbor.

At a point far away from the sources, the phase difference:

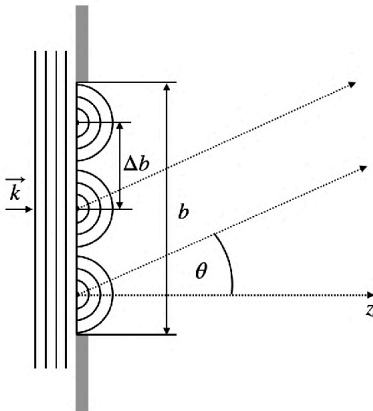
$$\Delta\phi = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \quad (1.119)$$

where θ is the angle relative to the z axis (the forward direction)

The superposition of these results in an intensity pattern:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(M \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right)} \quad (1.120)$$

1.14.21 Single Slit Diffraction



$M\Delta b = b$ M 個の波の干渉の式を適用すると、強度は以下のようになります。

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{M\pi\Delta b}{\lambda} \sin(\theta)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi\Delta b}{\lambda} \sin(\theta)\right)}$$

実際のスリットは点光源の集まりではなく連続的です。そこで、光源の数 M を無限大 ($M \rightarrow \infty$) にする極限をとります。

$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)$ と置くと、式は以下のようになります。

$$I = I_0 \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x/M)}$$

and in the approximation:

$$I(\theta) = I_s \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)} \right)^2$$

Intensity goes to zero at

$$\begin{aligned} \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta) &= m\pi \\ \sin(\theta) &= m \frac{\lambda}{b} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以外の整数}) \end{aligned}$$

1.14.22 Circular Aperture

For a circular aperture, the diffraction pattern follows a more complex mathematical form involving Bessel functions. The intensity distribution is given by:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin(\theta)$$

環(極小値)の位置: 強度がゼロになる位置は、ベッセル関数の性質により決まります。第 1 極小: $x_1 = 1.22\pi$
第 2 極小: $x_2 = 2.23\pi$ 第 1 極小の条件式:

$$x_1 = 1.22\pi = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin(\theta_1)$$

$$\sin(\theta_1) = 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

This is the first minimum of the diffraction pattern.

Airy disc The central bright region up to this first minimum is known as the Airy disc, and in microscopy, this defines a resolution element or resel.

1.14.23 Application: Diffraction Grating

構造: 幅 b のスリットが、間隔 d で N 個並んでいる構造を考えます。

Intensity of a diffraction grating

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \right)^2}_{\text{単スリット回折項}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)} \right)^2}_{\text{多重スリット干渉項}}$$

1.14.24 Properties of the Diffraction Pattern

The intensity pattern consists of main maxima, called diffraction orders, characterized by integer numbers. The central peak is the 0th order peak, the first main peak to the right is the 1st diffraction order, and so on.

極大と極小: 主 (Main) ピークの間には、 $N - 2$ 個の小さなピーク (副極大, secondary peak) と、 $N - 1$ 個の暗い点 (極小 minima) が存在します。

主ピークの位置: 干渉項の分母がゼロに近づく条件から求められます。

$$d \sin(\theta) = m\lambda$$

(m : 整数)

スリット幅 (b) の影響: スリット幅 b を小さくすると、単スリット回折の幅 (エンベロープ) が広がります。第 1 極小の位置は $\sin(\theta) = \lambda/b$ で決まります。スリット数 (N) の影響: スリット数 N を増やすと、主ピークはより鋭くなります。ピークの位置は変わりませんが、ピーク間の副極大の数が増え、主ピークの幅が狭くなるため、分光分解能が向上します。

分光分解能 (Spectral Resolution) 異なる波長 λ_1 と λ_2 をどれだけ明確に区別できるかという指標です。

分解能 Resolving Power (R) の式:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

(m : 回折次数, N : スリット数)

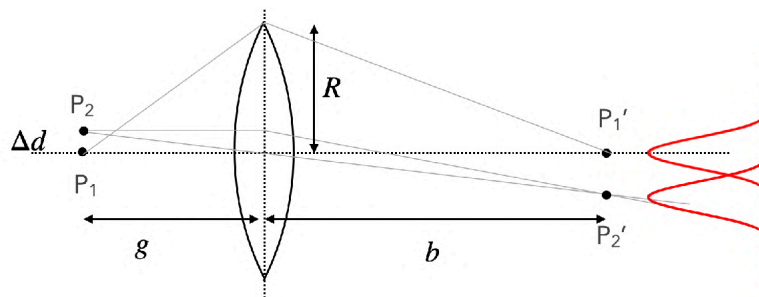
デバイ-シアーズ効果: 動的回折格子 (The Debye-Sears Effect) 物理的なスリットではなく、音波によって作られる「動く回折格子」についての説明です。原理: 透明な媒質 (水やガラス) に超音波を通すと、密度の疎密波が生じます。これが屈折率の周期的な変化を生み、光に対して回折格子のように振る舞います。格子の間隔: 音波の波長がそのまま格子定数 d になります。

$$d = \Lambda_{acoustic} = \frac{v_{sound}}{F}$$

(v_{sound} : 音速, F : 音波の周波数)

1.15 Diffraction in Applications

1.15.1 Rayleigh's Criterion for Resolution



Two point sources are considered just resolvable when the principal maximum (center) of one Airy pattern coincides with the first minimum (dark ring) of the other.

第一極小までの角度 θ_1

直径 D (半径 R) の円形開口部 (レンズ) を通る光 (波長 λ) が作る回折パターンの、中心から最初の暗環までの角度は以下の式で表されます。

$$\sin(\theta_1) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

(1.22 はベッセル関数 J_1 の最初のゼロ点に由来する係数です)

角度が小さい場合 ($\sin \theta \approx \theta$)、レンズから像までの距離を b とすると、像面上での分解可能な距離 Δx は次のように書けます。

$$\theta_1 = \frac{\Delta x}{b}$$

これら組み合わせると：

$$\frac{\Delta x}{b} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \implies \Delta x = 1.22 \frac{\lambda b}{D}$$

物体面上の距離 Δd 顕微鏡の倍率を $M = b/g$ (g は物体とレンズの距離) とすると、実際の物体上での距離 Δd は $\Delta d = \Delta x/M$ となるため：

$$\Delta d = \frac{1.22 \lambda b}{D} \times \frac{g}{b} = 1.22 \frac{\lambda g}{D}$$

ここで、レンズの性能を表す「開口数 (NA)」を導入します。

$$\text{NA} = n \sin(\alpha)$$

(n は媒質の屈折率、 α はレンズが光を取り込める最大角度の半分) レンズの直径 D と取り込み角 α の関係は $D \approx 2g \sin(\alpha)$ とみなせるため、これを Δd の式に代入します。

$$\Delta d = 1.22 \frac{\lambda g}{2g \sin(\alpha)} = \frac{0.61 \lambda}{\sin(\alpha)}$$

さらに屈折率 n を考慮して NA を使うと、最終的なレイリーの分解能の式が得られます。Two incoherent point sources can be resolved when their minimum separation Δd satisfies:

$$\Delta d \geq \frac{0.61 \lambda}{\text{NA}}$$

1.15.2 Abbe's Criterion

While Rayleigh's criterion applies to incoherent light sources where intensities add directly, Ernst Abbe developed a complementary theory for coherent imaging in the context of microscopy 周期 d の構造によって光が回折する角度 θ は以下の式に従います。

$$d \sin \theta = \lambda$$

レンズの取り込み限界 1 次回折光がレンズに入るためには、回折角 θ がレンズの最大取り込み角 α 以下である必要があります ($\sin \theta \leq \sin \alpha$)。ギリギリ分解できる条件は：

$$d \sin \alpha = \lambda$$

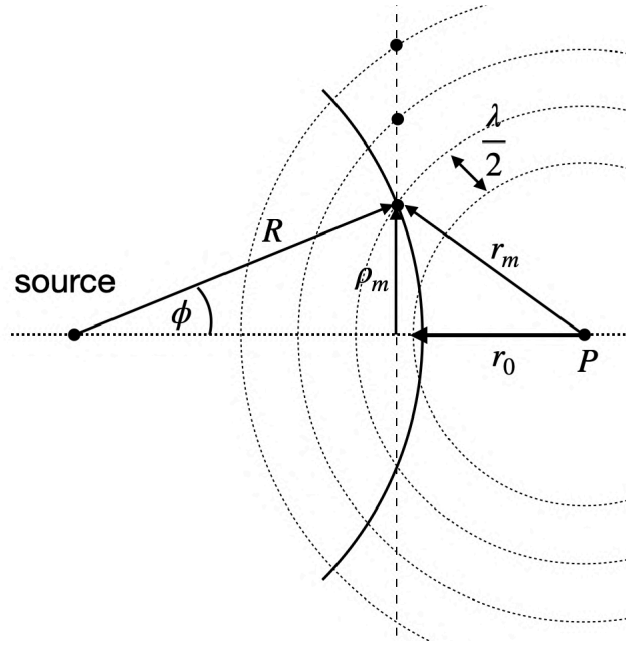
NA = $n \sin \alpha$ を用いると：

$$\Delta d = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda}{\text{NA}}$$

さらに、斜め照明などを用いて左右両方の回折光を取り込む最適な条件下では、分解能は 2 倍向上するため、以下のようになります。According to Abbe's theory, the minimum resolvable spacing microscope is:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2\text{NA}}$$

1.16 Fresnel Zones



$$r_m = r_0 + m \frac{\lambda}{2}$$

r_0 は最短距離、 m は整数です The regions between r_m, r_{m+1} is called fresnel zones. 隣り合うゾーン（例： m 番目と $m+1$ 番目）からの光は、光路差が $\lambda/2$ （位相差が π ）になるため、互いに打ち消し合います

$$\rho_m^2 = \left(r_0 + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2$$

$$\rho_m^2 = r_0 m \lambda + \frac{m^2 \lambda^2}{4}$$

For $r_0 \gg \lambda$,

$$\rho_m = \sqrt{m r_0 \lambda}$$

各ゾーンの幅 $\Delta \rho_m$ は、隣り合う半径の差として定義されます。

$$\Delta \rho_m = \rho_{m+1} - \rho_m = \sqrt{r_0 \lambda} (\sqrt{m+1} - \sqrt{m})$$

この式から、 m が大きくなる（外側に行く）ほど、ゾーンの幅は狭くなっていくことがわかります。フレネルゾーンの各ゾーン（幅 $\Delta \rho_m$ ）は、観測点に届く光の位相が半周期（180度、 π ラジアン）ずれる区間ごとに区切った領域を指します。これを半周期帯（half-period zones）とも呼びます。幅 $\Delta \rho_m$ を持つひとつのゾーン内部からの光だけに注目すると、その中での位相差は 0 から π まで変化します。これらを足し合わせると（ベクトル和をとると）、完全に強め合うわけではありませんが、ネット（正味）の振幅はゼロにならず、ある程度の光の強さを持ちます。

1.16.1 Fresnel Zone Plate

奇数ゾーン透過: 中心が透明 transparent。

偶数ゾーン透過: 中心が不透明 blocking（中心の直進光をブロック）。

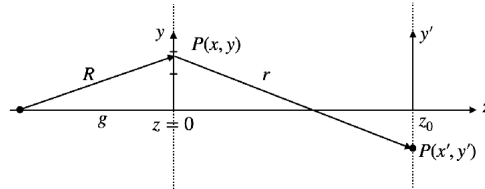
どちらの場合でも、焦点での集光効果は同様に得られます。

フレネルゾーンプレートは、通常のレンズが使えない、あるいは不便な場面で重要になります。

X 線顕微鏡: X 線は物質による屈折率が非常に小さいため、通常のレンズでは光を曲げられません。そのため、回折を利用するゾーンプレートが不可欠です。

光学システム: 薄くて軽いため、コンパクトな機器での集光に使われます。

1.16.2 Diffraction Integral



Fresnel-Kirchhoff diffraction integral

基本式: 観測点 $P(x', y')$ における全振幅 U_p は、開口面上のすべての点からの寄与を積分して求めます。

$$U_p = \iint \frac{CU_s}{r} e^{-ikr} dx dy$$

U_s : 開口部への入射波の振幅。 $U_s(x, y) = U_0(x, y)e^{i\phi(x, y)}$ r : 開口上の点から観測点までの距離。 e^{-ikr} : 距離 r 進んだことによる位相の変化。 C : 傾斜因子 (Obliquity factor)。 $C = \frac{i \cos(\theta)}{\lambda}$ とされ、波が進む方向性を補正します。

フレネル近似 (Fresnel Approximation)

回折積分を **「近傍場 (Near field)」** で計算するための近似手法です。光源やスクリーンが開口部に比較的近い場合に用います。距離 r を二項展開で近似し、位相項に二次関数的な変化 (x^2, y^2) が残る範囲まで考慮します。フレネル近似の式:

$$U(x', y', z_0) = \frac{ie^{-ikz_0}}{\lambda z_0} e^{-\frac{ik}{2z_0}(x'^2 + y'^2)} \iint U_s(x, y) e^{-\frac{ik}{2z_0}(x^2 + y^2)} e^{\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')} dx dy$$

積分の中に $e^{-\frac{ik}{2z_0}(x^2 + y^2)}$ という二次の位相項が含まれているのが特徴です。

フラウンホーファー近似 (Fraunhofer Approximation)

回折積分を **「遠方場 (Far field)」** で計算するための近似手法です。スクリーンが非常に遠い (z_0 が大きい) 場合に適用されます。開口部の大きさに比べて距離が十分遠いため、積分内の二次の位相項を無視 (≈ 1) できます。条件:

$$z_0 \gg \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$$

フラウンホーファー近似の式:

$$U(x', y', z_0) = \frac{ie^{-ikz_0}}{\lambda z_0} e^{-\frac{ik}{2z_0}(x'^2 + y'^2)} \iint U_s(x, y) e^{\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')} dx dy$$

積分内が $e^{\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')}$ という線形の位相項のみになり、計算が大幅に簡単になります。

what are the letters?

U_s : 開口部への入射波の振幅。 $U_s(x, y) = U_0(x, y)e^{i\phi(x, y)}$ r : 開口上の点から観測点までの距離。 e^{-ikr} : 距離 r 進んだことによる位相の変化。 C : 傾斜因子 (Obliquity factor)。 $C = \frac{i \cos(\theta)}{\lambda}$ とされ、波が進む方向性を補正します。

Fresnel Number

「どのくらい離れたら遠方場（フラウンホーファー）として扱ってよいか？」を直感的に判断するための指標です。経路差 Δs の展開から導かれ、開口サイズ b 、波長 λ 、距離 D を用いて以下のように定義されます。フレネル数:

$$F = \frac{b^2}{\lambda D}$$

判定基準: $F \ll 1$: フラウンホーファー回折（遠方場） $F \approx 1$: フレネル回折（近傍場） $F \gg 1$: 幾何光学（波としての広がりより直進性が支配的）

バビネの原理 (Babinet's Principle) 「互いに反転（補対）の関係にある開口（例：スリットとその逆の形をした遮蔽板）は、遠方場において同じ強度の回折パターンを作る」** という原理です。

ある開口による振幅を U_h 、その反転開口による振幅を U_d とすると、両者を足すと何も無い状態（自由空間の波 U_0 ）になります。

$$U_h + U_d = U_0$$

遠方場の光軸以外（暗い部分）では $U_0 \approx 0$ とみなせるため、

$$U_h \approx -U_d$$

となり、強度は振幅の二乗なので等しくなります。結論の式:

$$I_h = |U_h|^2 = |U_d|^2 = I_d$$

(ただし、光軸上の点を除く)

Babinet's principle states that the far-field diffraction intensity distribution of complementary apertures is identical. This means that an opaque object and its complementary aperture (where the object is replaced by a transparent region and vice versa) produce the same diffraction pattern in the far field.

Chapter 2

Electromagnetic Optics

これまでの光学（幾何光学、波動光学）では説明しきれなかった現象を扱うために、光を電磁波として再定義します。**Geometrical Optics**（幾何光学）: 光を「光線 (Ray)」として扱い、反射や屈折を説明しますが、干渉や回折は説明できません。**Wave Optics**（波動光学）: 光を「スカラー波 (Scalar Wave)」として扱い、干渉や回折を説明します。しかし、光の偏り（偏光）や、光が物質とどう相互作用するか（屈折率の物理的起源）は説明できません。**Electromagnetic Optics**（電磁光学）: 光を「電磁波 (Electromagnetic Wave)」として扱います。電場 (\vec{E}) と磁場 (\vec{B}) のベクトルを用いることで、偏光や原子内の電荷との相互作用を記述できます。

実験内容: 2枚の偏光板を通した光の強度を観察します。

1枚目の偏光板で、電場の振動方向を特定の方向（例：垂直）に限定します。

2枚目の偏光板を同じ方向（垂直）にすると、光は透過し強度が最大になります。

2枚目の偏光板を直交する方向（水平）にすると、強度はゼロになります（消光）。

結論: この「完全に光を消すことができる」という事実は、光がスカラー波ではなく、特定の振動方向を持つベクトル波 (Vectorial Wave) であることを証明しています。これを偏光 (Polarization) と呼びます。

2.0.1 Electromagnetic Spectrum

電磁気学の理論は「スケールフリー (Scale-free)」です。つまり、波長が変わっても物理法則は変わりません。

2.0.2 Maxwell Equations

光の振る舞いを記述するための基礎方程式です。ここでは電荷密度 $\rho = 0$ 、電流密度 $\vec{J} = 0$ の真空 (Vacuum) 中を考えます。ME.1 (ガウスの法則 - 電場): 電場の源（電荷）がない状態。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

ME.2 (ガウスの法則 - 磁場): 磁気単極子（モノポール）は存在しない。

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ME.3 (ファラデーの法則): 磁場の時間変化が電場の回転を生む。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ME.4 (アンペール・マクスウェルの法則): 電場の時間変化が磁場の回転を生む。

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ϵ_0 は真空の誘電率 (electric permeabilities)、 μ_0 は真空の透磁率 (magnetic permeabilities) です。

The displacement current

マクスウェルは、アンペールの法則における矛盾（コンデンサの極板間など、電流が流れていない場所での磁場の発生）を解決するために、変位電流という概念を導入しました。

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

これは実際に電荷が移動する電流ではありませんが、電場の時間変化が磁場を作るという点で電流と同じ働きをします。これにより、電磁波の存在が理論的に予言されました。

2.0.3 Deriving the Wave Equation

ME.3（ファラデーの法則）の両辺の回転（rotation, $\nabla \times$ ）をとります。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

右辺に ME.4 を代入して磁場 \vec{B} を消去します。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

左辺にベクトル解析の恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ （注： Δ はラプラシアン ∇^2 ）を適用します。真空中では $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ なので、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$$

これらを組み合わせると、波動方程式 (Wave Equation) が得られます。

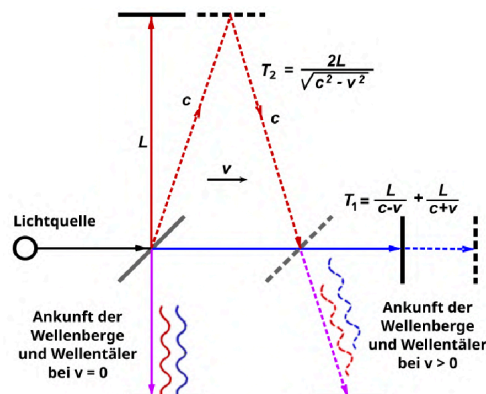
$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

(同様の式が磁場 \vec{B} についても成り立ちます)

Speed of light

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 299,792,458 \text{ m/s}$$

2.0.4 Michelson-Morley Experiment



1887年、光を伝える媒質と考えられていた「エーテル (Ether)」の存在を検証するために行われた実験です。理論的予測: 地球がエーテルの中を速度 v で動いていると仮定すると、光の進行方向とそれに垂直な方向で、光の往復時間 T に差 ΔT が生じるはずですが、エーテル流に平行な往復時間: $T_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2}$ エーテル流に垂直な往復時間: $T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$ 時間差 (近似) :

$$\Delta T \approx \frac{L v^2}{c^2}$$

結果: 干渉縞のズレは観測されませんでした (Null result)。意義: エーテル説が否定され、後のアインシュタインによる特殊相対性理論 (光速不変の原理) への道が開かれました。

2.0.5 Plane waves

波動方程式の基本的な解として、平面波を考えます。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

これを波動方程式に代入すると、ヘルムホルツ方程式 (Helmholtz Equation) が得られます。

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

マクスウェル方程式に平面波の解を適用すると、以下の重要な性質が導かれます。横波 (Transverse Wave): 電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} 、波数ベクトル \vec{k} (進行方向) はすべて互いに直交します。

$$\vec{k} \perp \vec{E}, \quad \vec{k} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

振幅の関係: 電場と磁場の大きさは以下の関係で結ばれています。

$$|\vec{B}_0| = \frac{1}{c} |\vec{E}_0|$$

2.0.6 Spherical Waves

平面波は理想的なモデルですが、実際の物理的な光源 (点光源や原子など) からは球面波が発生します。特徴: 強度は距離の二乗に反比例して減衰します ($1/r^2$)。記述: ベクトルポテンシャル \vec{A} とスカラー球面波関数 $U(\vec{r})$ を用いて記述されます。

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{r} e^{-ikr}$$

遠方場 (Far-Field): 光源から十分に離れた領域 ($r \gg \lambda$) では、球面波の波面は局所的に平面とみなすことができ、電場と磁場は進行方向に対して垂直 (横波) になります。

2.1 Polarization of EM Waves

The polarization of an electromagnetic wave is defined by the direction of its electric field vector in our laboratory frame.

The discovery of Polarization proved that Light is not Longitudinal Wave like sound, but Transverse Wave. Since Longitudinal Wave can not make Polarization happen.

光の偏光状態は、電場ベクトルの成分の振幅と位相差によって決まります。ここでは、波が z 方向に進むと仮定し、電場 \vec{E} を以下のように表します。

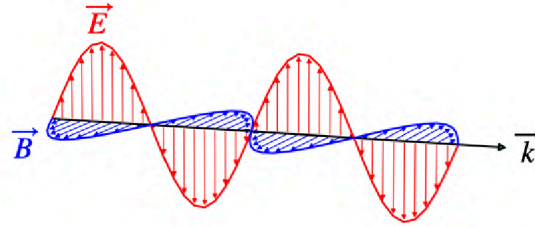
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

ここで、 \vec{E}_0 は x 成分と y 成分に分解できます。

$$\vec{E}_0 = E_{0x} \hat{e}_x + E_{0y} \hat{e}_y$$

2.1.1 Linearly Polarized waves

Light is called linearly polarized if the electric field vector oscillates in a single plane during light propagation



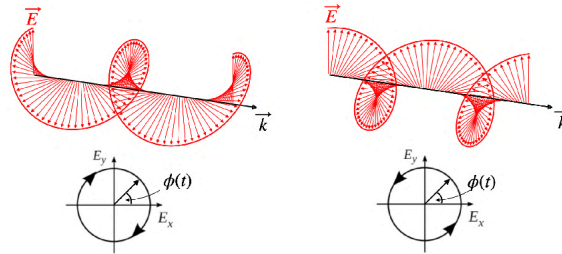
条件: x 成分と y 成分の位相 (タイミング) が揃っていること。

$$E_x = E_{0x}e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_y = E_{0y}e^{i(\omega t - kz)}$$

※ 位相差がないため、合成されたベクトルは一定の角度を保ったまま振動します。別名: π -偏光 (π -polarization) とも呼ばれます (原子と光の相互作用の文脈などで使用)。生成: 偏光板 (Polarizer) を通すことで容易に生成できます。

2.1.2 Circularly Polarized Waves



In circular polarized light, the end of the electric field vector describe a circle around the propagation direction. This means the electric field vector is rotating around the propagation direction.

条件:

- 2つの成分の振幅が等しい ($E_{0x} = E_{0y}$)。
- 2つの成分の間に $\pm\pi/2$ (90°) の位相差がある

$$E_x = E_{0x}e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_y = E_{0x}e^{i(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2})}$$

右円偏光 (Right Circularly Polarized): σ_- 偏光とも呼ばれます。

左円偏光 (Left Circularly Polarized): σ_+ 偏光とも呼ばれます。

生成: 1/4 波長板 (Quarter-wave plate) などの特殊な光学素子が必要です

2.1.3 Elliptically Polarized Waves

最も一般的な偏光の状態です。電場の先端が楕円を描きます。

条件: 振幅が異なる ($E_{0x} \neq E_{0y}$)、かつ位相差 $\delta = \delta_2 - \delta_1$ が任意である場合

数式:

$$E_x = E_{0x}e^{i(\omega t - kz + \delta_1)}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \delta_2)}$$

楕円の式: 電場の軌跡は以下の式で表されます。

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

楕円の傾き角 Ψ は以下の式で計算されます。

$$\tan(2\Psi) = \frac{2E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos(\delta)$$

2.2 Unpolarized Light

太陽光や LED のように、電場ベクトルがランダムに変動し、あらゆる方向の成分が均等に含まれている状態です。偏光度 (Degree of Polarization, P): 部分的に偏光している光について、回転する偏光子を通じた時の強度変化で定義されます。

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

完全な無偏光なら $P = 0$ ($I_{max} = I_{min}$) 完全な偏光なら $P = 1$ ($I_{min} = 0$)

2.2.1 Analyzing Polarization & Law of Malus

The polarization state of light is analyzed with the help of polarizers. 偏光子は、特定の方向 (透過軸) の電場成分のみを通すフィルターの役割を果たします。これらは異方性 (Anisotropic) 材料から作られています。

入射する電場を \vec{E} 、偏光子の透過軸方向の単位ベクトルを \hat{e}_p とすると、透過後の電場 \vec{E}_t は、入射電場の「射影 (Projection)」となります。

$$\vec{E}_t = (\vec{E} \cdot \hat{e}_p) \hat{e}_p = E \cos(\theta) \hat{e}_p$$

ここで θ は、入射電場の振動方向と偏光子の軸との角度です。

Law of Malus

光の強度 I は電場の振幅の 2 乗に比例します ($I \propto |E|^2$)。上記の式の両辺を 2 乗することで、透過光の強度が導かれます。

$$I_t = I_0 \cos^2(\theta)$$

これがマリユスの法則です。

$\theta = 0^\circ$ のとき、透過率は最大 (100%)。

$\theta = 45^\circ$ のとき、強度は 50% になる ($\cos^2 45^\circ = 0.5$)

$\theta = 90^\circ$ のとき、強度は 0 になる (直交しているため)。

2.2.2 The Three Polarizer Paradox

偏光板が単に光を「ブロック」するのではなく、「射影 (ベクトル成分の取り出し)」を行っていることを示す有名な例です。

2 枚の場合: 偏光板を垂直 (0° と 90°) に配置すると、光は通りません (直交ニコル)。

3 枚目を挿入: この 2 枚の間に、軸を 45° に傾けた 3 枚目の偏光板を入れます。結果: 光が通るようになります。

理由の解説: 最初の偏光板 (0°) を通った光は、垂直な偏光板 (90°) に対して成分を持ちませんが、 45° の偏光板に対しては成分を持っています。 45° の偏光板を通ると、電場ベクトルが 45° の方向に「射影 (再

定義)」されます。この 45° の光は、最後の 90° の偏光板に対しても成分を持つようになるため、光が通過します。

数式による証明: 最終的な強度は以下ようになります。

$$I_{final} = I_0 \times \cos^2(45^\circ) \times \cos^2(45^\circ) = I_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{I_0}{4}$$

回転する偏光板と検出器を使って、光の状態を判別する基準です。

Polarization State	Observed Intensity Behavior
Linear	Varies from maximum to complete extinction (zero)
Circular	Constant intensity (no variation with rotation)
Unpolarized	Constant intensity at 50% of incident
Elliptical	Varies between max and min, but never reaches zero

干渉 (Interference): 直交する偏光同士は干渉しません。

$$I_{total} = |E_1|^2 + |E_2|^2 = 2I_0$$

2.3 Energy Transport and Momentum Transport of EM waves

2.3.1 Energy Transport

電磁波の基本的な性質は、「質量ではなくエネルギーを運ぶ」ことです。私たちが光検出器で測定するのは電場そのものではなく、このエネルギーです。静電場と静磁場の知識から、単位体積あたりのエネルギー（エネルギー密度）は以下のように定義されます。電場のエネルギー密度 (Energy density of the electric field):

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$$

磁場のエネルギー密度 (Energy density of the magnetic field):

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}$$

これらを合計すると、電磁波の総エネルギー密度 w となります。

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

※ 真空中では電磁波の性質により $w = \epsilon_0 E^2$ と単純化できますが、ここでは一般形を用いて議論を進めません。

2.3.2 2. ポインティング・ベクトルとエネルギー保存則 (Poynting Vector and Energy Conservation)

ある体積 V の中にあるエネルギーが時間とともに減る場合、そのエネルギーはどこへ行ったのでしょうか? 「エネルギー保存則」に基づき、減った分は表面を通過して外へ流れ出ているはず。このエネルギーの流れを表すベクトルをポインティング・ベクトル (Poynting Vector, \vec{S}) と呼びます。導出の考え方: エネルギー密度の時間変化 $\frac{dw}{dt}$ を計算し、マクスウェル方程式 ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ や $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を含む式) とベクトル公式 $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E})$ を利用して変形すると、以下の「連続の方程式」が得られます。

$$\frac{dw}{dt} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

ここで導かれる \vec{S} の定義は以下の通りです。

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

(または真空中の関係式 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ を用いて $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$) 物理的意味: 電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} の外積であり、電磁波がエネルギーを運ぶ方向と大きさ (単位面積・単位時間あたりのエネルギー流) を表します。もし電流密度 \vec{j} が存在する場合 (真空中でない場合)、式は以下の「ポインティングの定理 (Poynting theorem)」へと拡張されます。

$$\frac{dw}{dt} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

右辺の $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ は、電場が電荷に対して行った仕事 (ジュール熱などによるエネルギー消費) を表します。

2.3.3 Intensity and Measurement

ポインティング・ベクトルの大きさ $S = |\vec{S}|$ は、単位面積を通過するエネルギーの流れ (W/m^2) であり、これが「光の強度」に相当します。

$$S = c\epsilon_0 E^2 = I$$

検出器が実際に測るもの:

光の周波数は非常に高い ($\sim 10^{14}$ Hz) ため、通常の光検出器 (Photodetector) は瞬間の振動には追従できません。検出器が測定するのは、振動の 1 周期にわたる「時間平均 (Time average)」です。平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ の場合、 \cos^2 の時間平均が $1/2$ になるため、観測される平均強度は以下のようになります。

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2$$

2.3.4 Momentum Transport and Radiation Pressure

電磁波はエネルギーだけでなく「運動量 (Momentum)」も運びます。これにより、光が物に当たると圧力を及ぼします。これを放射圧 (Radiation Pressure) と呼びます。運動量の導出: 相対性理論の式 $W^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ において、光子 (光) は質量 $m = 0$ なので、運動量 p とエネルギー W の関係は以下のようになります。

$$p = \frac{W}{c}$$

これを単位体積・単位時間あたりで考えると、放射圧 p_{rad} (力 ÷ 面積) はポインティング・ベクトルの大きさ S を用いて表せます。壁に当たった時の圧力: 壁の性質によって圧力が変わります。

完全吸収 (Perfect absorption):

黒い壁のように光を完全に吸収する場合、光の運動量がそのまま伝わります。

$$p_{\text{rad}} = \frac{S}{c}$$

完全反射 (Perfect reflection):

鏡のように光を跳ね返す場合、運動量の変化は「入ってくる分」+「跳ね返る分」で 2 倍になります。

$$p_{\text{rad}} = \frac{2S}{c}$$

基本的な考え方:

$$\text{pressure} = \frac{F}{A} \tag{2.1}$$

$$\Delta W = SA\Delta t \implies \text{Force} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{SA}{c} \tag{2.2}$$

2.3.5 Microscopic Picture of Dielectric Response

物質が電磁波にどう反応するかを理解するための、原子レベルのモデルです。

2.3.6 Single Atom Response

Electron Cloud (電子雲): 原子核の周りに一様に分布する電子の電荷。

Restoring Force (復元力): 電子雲と原子核がずれたときに、元に戻ろうとする力。

電子雲 (半径 a) の電荷密度 ρ は以下のようになります。

$$\rho = -\frac{3q}{4\pi a^3}$$

この電荷分布により、中心からの距離 r に比例する電場 $\vec{E}(r)$ が生じ、これがバネのような復元力として働きます。

$$E = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} \vec{r} \quad (2.3)$$

原子の分極率 (Atomic Polarizability)

外部から電場をかけたときに、原子がどれくらい電氣的に偏る (分極する) かを示す指標です。

Induced Dipole Moment (誘起双極子モーメント): 外部電場によってプラスとマイナスの中心がずれ、生じる電氣的な偏り。

Electronic Polarizability (電子分極率): α で表される、原子の分極のしやすさ。

The displacement d which compensates $E_{external}$ with the atom's internal restoring force, creates a Dipole moment

$$\vec{p} = q\vec{d} = \alpha\vec{E}_{ex}$$

ここで、分極率 α は原子の体積 (a^3) に比例します。

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$$

2.3.7 Macroscopic Description of Dielectric Materials

分極密度 \vec{P} は原子密度 N と個々のモーメント \vec{p} の積です。

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

この分極により、物質の表面には表面電荷密度 (Surface charge density) σ_b が現れます。

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (\hat{n} \text{ は表面の法線ベクトル})$$

また、分極が一様でない場所では、物質内部に体積電荷密度 (Volume charge density) ρ_b が生じます。

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

電束密度 (Electric Displacement Field)

Electric Displacement Field (電束密度): \vec{D} 。

Free Charges (自由電荷): ρ_f 。外部から持ち込まれたり、導体中を動ける電荷。

数式と導出: 真空中でのガウスの法則 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$ に、束縛電荷 $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ を代入して整理すると、自由電荷 ρ_f だけに依存する美しい式が得られます。

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

線形誘電応答 (Linear Dielectric Response)

多くの物質では、分極は電場に比例します。

用語:

Electric Susceptibility (電気感受率): χ 。

Permittivity (誘電率): ϵ_0 。

Dielectric Constant / Relative Permittivity (比誘電率): ϵ_r 。

数式:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

これにより電束密度は以下のように書けます。

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

ここで比誘電率は $\epsilon_r = 1 + \chi$ です

2.3.8 クラウジウス・モソッティの関係式 (Clausius-Mossotti Relation)

ミクロな量 (分極率 α) とマクロな量 (比誘電率 ϵ_r) をつなぐ重要な式です。概念: 密度が高い物質中では、ある原子が感じる局所電場 (Local Field) \vec{E}_{loc} は、外部からの平均電場とは異なります (周囲の原子からの影響を受けるため)。数式:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$$

2.3.9 Maxwell's Equations in Matter

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(ファラデーの法則: 変化なし)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

(ガウスの法則: 自由電荷のみに依存)

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f$$

(アンペールの法則: 変位電流 $\partial \vec{D} / \partial t$ を含む)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(磁気単極子の不在)

2.3.10 構成方程式 (Constitutive Relations):

物質の性質を反映する式です。

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

ここで χ_m は Magnetic Susceptibility (磁化率) です。

2.3.11 物質中の波動伝搬 (Wave Propagation in Non-conducting Matter)

波動方程式と速度: マクスウェル方程式から導かれます。

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

位相速度 v は誘電率と透磁率で決まります。

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

用語: Refractive Index (屈折率): n 。数式: 非磁性体 ($\mu_r \approx 1$) の場合:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

重要ポイント: 物質に入ると波長 λ は変化しますが、周波数 (Frequency) ω は変化しません。

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \omega = \text{一定}$$

2.3.12 特殊なケース: 負の屈折 (Negative Refraction)

通常ありえない「負の屈折率」を持つ人工物質 (メタマテリアル) についての解説です。条件: 誘電率 ϵ_r と透磁率 μ_r が同時に負 (Negative) である場合。現象: 屈折率 n が負になり、スネルの法則が逆転します。光は通常の屈折とは逆方向に曲がります。

$$n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

2.3.13 負の屈折率物質中のエネルギー流 (Energy Flow)

ポインティング・ベクトル (Poynting Vector): エネルギーの流れを表すベクトル \vec{S} です。

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

奇妙な性質: 負の屈折率を持つ物質中では、エネルギーの流れ (\vec{S}) と波の進行方向 (波数ベクトル \vec{k}) が逆向きになります。

$$\vec{S} \propto -\vec{k}$$

つまり、波の山は前に進んでいるように見えても、エネルギーは後ろに流れている状態です。

2.3.14 メタマテリアルの実現 (Metamaterial Realization)

自然界には存在しない「負の透磁率」などをどうやって作るかという技術です。

スプリットリング共振器 (Split-Ring Resonators, SRR) 金属のリングに切れ込みを入れた構造体です。仕組み: リングがコイル (インダクタンス L)、切れ込みがコンデンサ (キャパシタンス C) の役割を果たし、特定の周波数 ω_0 で共振する LC 回路として機能します。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

負の透磁率の生成: 外部磁場に対して共振を起こすと、特定の周波数帯で実効透磁率 (Effective Permeability) $\mu(\omega)$ の実部が負になります。

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{F\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

共振周波数 ω_0 の少し上の周波数で、分母の影響により全体が負の値を取り得ます。これにより、人工的に負の屈折率を実現します。

2.3.15 Interaction Model & Approximations

光が物質に入射すると、光の電場（Electric field）が原子内の荷電粒子（主に電子）を揺さぶります。この現象を記述するために、2つの重要な近似（Approximation）を用います。

双極子近似 (Dipole Approximation): 可視光の波長 ($\lambda \approx 500 \text{ nm}$) は原子のサイズ ($\approx 0.1 \text{ nm}$) よりもはるかに大きいため、原子全体において電場は「一様である」とみなします。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \vec{E}(t)$$

局所場近似 (Local Field Approximation): 個々の原子に作用する電場は、物質全体の巨視的な電場 (Macroscopic field) とほぼ等しいとみなします。

The equation of motion for the electron displacement vector follows:

$$\ddot{\vec{r}} + \sigma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}(t)$$

慣性: 加速度 $\ddot{\vec{r}}$

減衰 (Damping): $\sigma\dot{\vec{r}}$ (摩擦や抵抗に相当)

復元力 (Restoring Force): $\omega_0^2\vec{r}$ (バネの力、 ω_0 は共鳴周波数)

The solution

$$\vec{r}(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \vec{E}(t)$$

複素屈折率 (Complex Refractive Index)

電子の変位により誘起される電気双極子モーメントは $\vec{p} = q\vec{r}(t)$ となり、単位体積あたりの双極子モーメントである分極 (Polarization) \vec{P} は以下のように表されます (N は電子数密度)。

$$\vec{P} = Nq\vec{r}(t) = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \vec{E}(t) = \epsilon_0\chi\vec{E}(t)$$

ここから、電気感受率 (Susceptibility) χ が複素数になることがわかります。これに伴い、屈折率 n も複素数として定義されます。

$$n = \sqrt{1 + \chi} \approx n_r - i\kappa$$

Lecture ノートにあるように、複素屈折率の実部 n_r と虚部 κ は以下のように明示的に書けます ($A = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0m}$ として)。実部 (Real part) n_r : 屈折率の分散 (光速の変化) を担います。

$$n_r = 1 + A \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\sigma^2}$$

虚部 (Imaginary part) κ : 光の吸収を担います。

$$\kappa = A \frac{\sigma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\sigma^2}$$

2.3.16 吸収とランベルト・ベールの法則 (Absorption & Lambert-Beer Law)

複素屈折率の虚部 κ は、光が物質中を伝播する際の減衰 (吸収) を記述します。 z 方向に進む平面波の電場は以下のように減衰項を持ちます。

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-i\omega t} e^{in_r k_0 z} \underbrace{e^{-\kappa k_0 z}}_{\text{減衰項}}$$

光の強度 I は電場の振幅の二乗に比例するため、距離 z と共に指数関数的に減少します。これがランベルト・ベールの法則 (Lambert-Beer Law) です。

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

ここで、 α は吸収係数 (Absorption coefficient) であり、 κ と以下の関係にあります。

$$\alpha = 2k_0 \kappa = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$$

実用的な測定 (化学分析など) では、吸光度 (Absorbance) A が濃度 c に比例する式 $A = \epsilon c L$ が用いられます。

2.3.17 Dispersion: Phase & Group Velocity

屈折率の実部 n_r が周波数に依存することにより、光の速度には 2 つの概念が生じます。位相速度 (Phase Velocity): 波面の進む速度。

$$v = \frac{c}{n_r}$$

群速度 (Group Velocity): 波束 (エンベロープ) の進む速度。情報の伝達速度に対応します。

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega}}$$

2.3.18 Normal & Anomalous Dispersion

屈折率の周波数依存性 $dn_r/d\omega$ により、分散は 2 つの領域に分類されます。正常分散 (Normal Dispersion): $\frac{dn_r}{d\omega} > 0$ (または波長で考えると $\frac{dn}{d\lambda} < 0$) 周波数が高い (波長が短い) ほど屈折率が高くなる通常の振る舞いです。例: プリズムで青い光が赤い光より大きく曲がる現象。共鳴周波数から離れた領域で見られます。異常分散 (Anomalous Dispersion): $\frac{dn_r}{d\omega} < 0$ 周波数が高いほど屈折率が低くなる現象です。重要: 吸収共鳴の直近でのみ発生します。吸収ピークの付近で屈折率が急激に減少する領域です。

2.3.19 超光速群速度 (Superluminal Group Velocity)

異常分散領域 (吸収ピーク付近) では、計算上の群速度 v_g が光速 c を超える (あるいは負になる) という直感に反する現象が起こり得ます。

$$|v_g| > c$$

しかし、これは相対性理論 (因果律) と矛盾しません。物理的解釈: 波束が激しく変形 (吸収によるスペクトルの変化) するため、波束のピーク位置の見かけ上の移動速度が c を超えるだけです。因果律: 実際の情報やエネルギーの伝達速度 (信号速度) は常に c 以下です。

2.3.20 クラマース・クロニツヒの関係式 (Kramers-Kronig Relations)

因果律 (Causality) という基本的な原理から、複素感受率 (または屈折率) の実部と虚部は互いに独立ではなく、積分変換によって結び付けられていることが導かれます。

$$n_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \kappa(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

この関係式は、「吸収 (虚部) がある場所には必ず分散 (実部) が存在する」という物理的必然性を示しています。異常分散が必ず吸収共鳴付近で起こるのも、この数学的関係によるものです。これは実験データの整合性チェックや、片方の測定値からもう一方を推定する際に非常に有用です。

2.4 Reflection and Refraction of Electromagnetic Waves

2.4.1 Effect of the Refractive Index

ここでは、電磁波が「薄い物質 (Slab)」を通過する際に、どのように変化するかを説明しています。これは物質中の光の伝播速度が変わり、位相が遅れることの基礎的なモデルです。

平面波 (Plane wave) が厚さ Δz の薄い物質に入射します。

真空中での電場 E_s に対し、屈折率 n の物質中を通ると位相項が変化します。

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - kz - (n-1)k\Delta z)}$$

これを整理すると、位相のズレ $\theta = k(n-1)\Delta z$ を用いて以下のように書けます。

$$E = e^{-i\theta} E_s$$

θ が小さい (物質が非常に薄い) と仮定し、指数関数のテイラー展開 (Taylor expansion) $e^x \approx 1 + x$ を利用します。

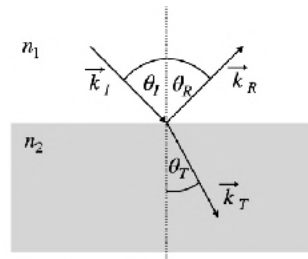
$$e^{-ik(n-1)\Delta z} \approx 1 - ik(n-1)\Delta z - \frac{k^2(n-1)^2\Delta z^2}{2}$$

この式は、透過後の電場が「元の波」と「物質によって生じた遅れ成分 (90 度位相がずれた成分)」の和で表せることを示しています。位相遅延 (Phase delay): 波の山と谷のタイミングが $k(n-1)\Delta z$ だけ遅れます。振幅 (Amplitude): ごくわずかに減少します。(提供されたコードはこの干渉の様子をグラフ化するものです)

The total field behind the thin slab therefore is

$$E(z) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} - ik(n-1)\Delta z E_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.4)$$

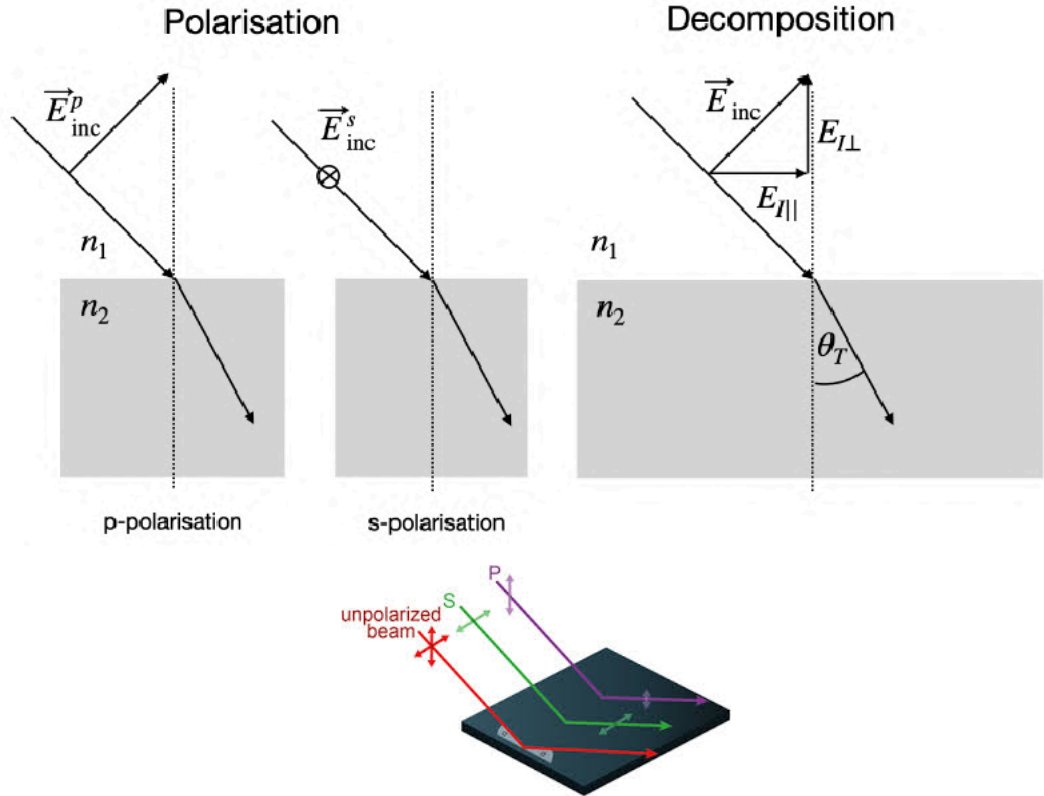
2.4.2 反射と屈折の一般的記述 (General Description of Reflection and Refraction)



$$\vec{E}_{inc} = \vec{E}_I e^{i(\omega t - \vec{k}_I \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_{ref} = \vec{E}_R e^{i(\omega t - \vec{k}_R \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_{tra} = \vec{E}_T e^{i(\omega t - \vec{k}_T \cdot \vec{r})}$$



- **p-polarized light:** electric field is in the plane of incidence (given by the k -vector and the surface normal), also called transverse magnetic (TM)
- **s-polarized light:** electric field is perpendicular to the plane of incidence, also called transverse electric (TE)

2.4.3 境界条件 (Boundary Conditions)

電束密度 \vec{D} の法線成分 (Normal component) 使用する式: ガウスの法則 (Gauss's law) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ 導出方法: 境界面をまたぐ小さな円柱 (ピルボックス) を考え、その表面で積分します (ガウスの定理)。高さ $h \rightarrow 0$ の極限を取ると、側面の寄与は消え、上面と下面の差だけが残ります。結果:

$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f$$

ここで σ_f は自由表面電荷密度 (Surface charge density)。通常、絶縁体 (誘電体) 同士の境界では $\sigma_f = 0$ なので、 $D_{1\perp} = D_{2\perp}$ 、つまり $\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}$ となります。

電場 \vec{E} の接線成分 (Tangential component) 使用する式: ファラデーの法則 (Faraday's law) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 導出方法: 境界面をまたぐ長方形のループを考え、線積分します (ストークスの定理)。ループの面積をゼロに近づけると、右辺の磁束変化はゼロになります。結果:

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

つまり、電場の接線成分は境界で **連続 (Continuous)** であり、変化しません。

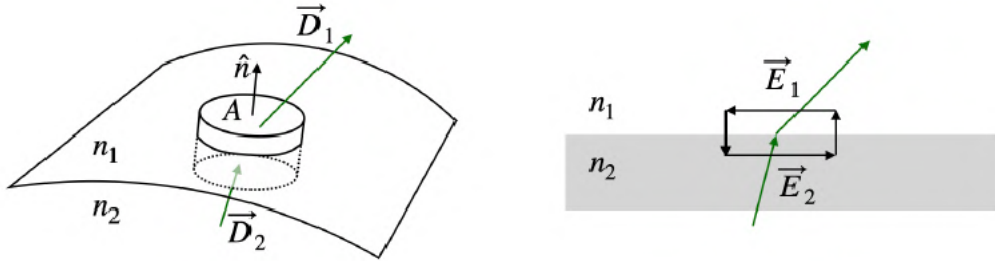
磁場の境界条件 (Magnetic Field)

磁場の強さ \vec{H} の接線成分アンペールの法則を使用。表面電流密度 (Surface current density) \vec{K} がなければ、接線成分は連続です。

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$$

磁束密度 \vec{B} の法線成分 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ より、法線成分は常に連続です。

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$



2.4.4 反射と屈折 (Reflection/Refraction) - 周波数と波数の整合 (matching)

これらの境界条件を満たすために、波の周波数と方向がどうあるべきかを導きます。

周波数整合 (Frequency Matching): 境界条件が常に (すべての時間 t で) 成立するためには、入射・反射・透過波の振動数は同じでなければなりません。

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T$$

位相整合 (Phase Matching): 境界条件がすべての場所 (界面上の点 \vec{r}) で成立するためには、位相項 $\vec{k} \cdot \vec{r}$ が一致する必要があります。

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$$

スネルの法則の導出 (Derivation of Snell's Law): 上記の位相整合の式から、界面に平行な方向の波数成分が保存されることがわかります。

$$k_I \sin(\theta_I) = k_R \sin(\theta_R) = k_T \sin(\theta_T)$$

反射の法則 (Law of Reflection): 同じ媒質内では波数 k の大きさは同じ ($k_I = k_R$) なので、

$$\theta_I = \theta_R$$

(入射角=反射角) スネルの法則 (Snell's Law): 異なる媒質間では $k = nk_0$ (k_0 は真空中の波数) なので、

$$n_1 k_0 \sin(\theta_I) = n_2 k_0 \sin(\theta_T)$$

これを整理して、有名な屈折の法則が得られます。

$$n_1 \sin(\theta_I) = n_2 \sin(\theta_T)$$

以上の流れで、マクスウェル方程式という基礎原理から、私たちがよく知る反射や屈折の法則が導き出されています。

2.5 Fresnel Equations

2.5.1 Reflection

BCs 概念: 光は電場 (Electric Field) と磁場 (Magnetic Field) の波です。異なる物質の境界 (インターフェース) において、これらの波の振幅がつながらなければなりません。これを整合 (Matching) と呼びます。

ルール: 境界の両側で、電場の「接線成分 (面に平行な成分)」は連続でなければなりません (同じ値になる)。

2.5.2 s 偏光 (s-polarized light)

定義: 入射面 (入射光線と法線が作る面) に対して、電場が垂直 (Perpendicular) に振動している光です。

式の導出の考え方: 電場 (E) は境界面に平行なので、そのまま連続条件「 $E_I + E_R = E_T$ 」が使えます (I: 入射, R: 反射, T: 透過)。磁場 (B) は傾いているため、コサイン (cos) を使って成分を合わせます。これらを連立方程式として解くと、反射係数 r_s が求まります。

フレネル係数 (s 偏光の反射): The Resnel Coefficient For the Reflection of s polarized light

$$r_s = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 \cos \theta_I - n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T}$$

ここで n は屈折率、 θ は角度です。この式は、s 偏光がどれくらい反射するかを示します。

The Fresnel Coefficient for the transmission of spolarized light

$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1 \cos(\theta_I)}{n_1 \cos(\theta_I) + n_2 \cos(\theta_T)} = t_s \quad (2.5)$$

2.5.3 S polaized light

定義: 入射面に対して、電場が平行 (Parallel) に振動している光です。

式の導出の考え方: こちらは電場 (E) が傾いているため、電場の足し合わせにコサイン (cos) が必要になります。逆に磁場 (B) は面に平行になります。フレネル係数 (p 偏光の反射):

$$r_p = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_2 \cos \theta_I - n_1 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_T + n_2 \cos \theta_I}$$

$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1 \cos(\theta_I)}{n_1 \cos(\theta_T) + n_2 \cos(\theta_I)} = t_p \quad (2.6)$$

2.5.4 空気からガラスへの反射と位相 (Air to Glass)

屈折率が低い物質 (空気 $n = 1$) から高い物質 (ガラス $n = 1.5$) へ光が入るケースです。

位相のジャンプ (Phase Jump):

s 偏光: 常に位相が π (180 度) ずれます (山が谷になって反射するイメージ)。

p 偏光: 角度によって挙動が変わります。

ブリュースター角 (Brewster Angle): 現象: 特定の入射角において、p 偏光の反射がゼロ ($r_p = 0$) になります。

意味: この角度で反射した光は、完全に s 偏光のみになります。式:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

物理的理由: 物質内の双極子 (dipole) が揺さぶられますが、双極子はその振動方向 (軸方向) には電磁波を出さないため、反射方向への放射が消える現象です。

2.5.5 ガラスから空気への反射: 全反射 (Total Internal Reflection)

今度は逆に、屈折率が高い物質から低い物質へ光が進むケースです。臨界角 (Critical Angle): ある角度 θ_C を超えると、光が外 (空気側) に出られなくなります。式: $\sin \theta_C = \frac{n_2}{n_1}$ 全反射: 臨界角より浅く入射すると、光は 100% 反射されます。これを全反射 (Total Internal Reflection) と呼びます。反射係数の大きさは $|r| = 1$ となります。

2.5.6 エバネッセント波 (Evanescent Wave)

全反射が起きているとき、外側（空気側）の電場はどうなっているのでしょうか？実は「完全にゼロ」ではありません。現象：境界のすぐ外側には、距離とともに指数関数的に減衰する「染み出し波」が存在します。これをエバネッセント波と呼びます。数学的説明：全反射の条件下では、透過光の波数ベクトル（波の進み方を表すベクトル）成分が虚数 (Imaginary) になります。物理の方程式において e^{ikx} の k が虚数 ($i\alpha$) になると、 $e^{-\alpha x}$ という形になり、これは「波として進まず、距離 x と共に急激に小さくなる」ことを意味します。式の形：

$$E_{trans} \propto e^{-\frac{x}{\delta}}$$

(δ は減衰長。境界面からわずか数百ナノメートルでほぼ消滅します) 応用：この波はエネルギーを運びませんが、近くに別の物体（ガラスや細胞など）を近づけると、エネルギーが「トンネル」して光が伝わります。これは TIRF 顕微鏡などで利用されます。

界面を $y = 0$ とし、光が入射面 (xy 平面) 内を進み、媒質 1 (屈折率 n_i) から媒質 2 (屈折率 $n_t < n_i$) へ入射角 θ_i で入射するとします。このとき、媒質 2 ($y > 0$) における透過光の電場 \vec{E}_t は以下の形で表されます。

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-\beta y} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

ここで、各項の意味は以下の通りです。振幅項 ($e^{-\beta y}$): 界面からの距離 y とともに指数関数的に減衰します。伝播項 ($e^{i(k_x x - \omega t)}$): 界面に沿った方向 (x 方向) に伝播する波を表します。減衰定数 β : 以下の式で与えられます。

$$\beta = k_t \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$$

ここで、 $k_t = \frac{2\pi n_t}{\lambda}$ は透過側の波数です。

導出この波形は、スネルの法則を全反射の条件に適用し、波動方程式（平面波解）に代入することで導かれます。

スネルの法則の拡張

: スネルの法則 $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_i}$ より、透過角 θ_t について $\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i$ が成り立ちます。全反射条件 ($\theta_i > \theta_c$) では $\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i > 1$ となるため、 $\sin \theta_t$ は 1 を超え、実数の角度 θ_t は存在しません。

複素コサインの導入

: $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}$ の関係式を用いると、ルートの中身が負になるため、 $\cos \theta_t$ は純虚数となります。

$$\cos \theta_t = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$$

物理的に振幅が無限大に発散しない解 ($y \rightarrow \infty$ で減衰する解) を選ぶため、符号を適切に選びます (Hecht の表記では虚数単位 i の扱いに依存しますが、結果として減衰項を導きます)。

平面波への代入

透過波を平面波 $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$ と仮定します。波数ベクトル \vec{k}_t を成分表示すると $\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t(x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)$ となります。これに上記の $\sin \theta_t$ (実数) と $\cos \theta_t$ (純虚数) を代入すると、位相項の中に実数の指数関数部分が現れます。

$$e^{ik_t(x \sin \theta_t + y(\pm i \sqrt{\dots}))} = e^{-k_t y \sqrt{\dots}} e^{ik_t x \sin \theta_t}$$

これにより、具体的な形で示した式が得られます。

解釈エバネッセント波には以下のような物理的な特徴があります

。表面波 (Surface Wave) : 波の等位相面 (波面) は界面に対して垂直 ($x = \text{一定の面}$) であり、波は界面に沿って進みます。界面から離れる方向へはエネルギーを運びません (平均ポインティングベクトルの界面法線成分はゼロ)。指数関数的減衰: 界面から波長程度の距離 (侵入長、Penetration depth) で振幅は急速にゼロに近づきます。トンネル効果 (フラストレーション全反射) : エバネッセント波が存在する領域 (界面のすぐ近く) に別の屈折率の高い媒質を近づけると、光がその媒質へ「トンネル」して透過する現象が起こります。これは量子力学におけるトンネル効果と類似しており、光ファイバーのカプラーや指紋センサーなどで応用されています。

2.5.7 強度 (Intensities)

ポインティング・ベクトル (Poynting Vector):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_r \epsilon_0 v^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$

意味: 電磁波が単位時間に単位面積を通過するエネルギー (パワー) の向きと大きさを表します。×: 外積といって、 \vec{E} と \vec{H} の両方に垂直な方向 (つまり波が進む方向) にエネルギーが流れることを示しています。

電磁波 (平面波) において、 $E = vB$ (v はその物質中の光速) $B = \mu H$ (μ は透磁率) の関係にあるため、 $H = \frac{B}{\mu} = \frac{E}{\mu v}$ と書き換えられます。 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 、 $S = E \cdot \frac{E}{\mu v} = \frac{E^2}{\mu v}$ 、 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, v = \frac{c}{n}, \epsilon_r = n^2$ (非磁性体の場合)

The magnitude of the Poynting vector is therefore given by

$$S = \epsilon_r \epsilon_0 v |\vec{E}|^2 = n \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$$

The intensity is then obtained from the integration over one cycle of oscillation, which finally results in

$$I = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$$

反射率 (Reflectance, R):

単純に反射係数の絶対値の 2 乗です。式: $R = |r|^2$

透過率 (Transmittance, T):

注意点: 単に係数の 2 乗 ($|t|^2$) ではありません。屈折によってビームの太さ (断面積) が変わるため、補正が必要です。式:

$$T = \frac{n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I} |t|^2$$

エネルギー保存則: 吸収がない場合、反射率と透過率の和は必ず 1 になります。

$$R + T = 1$$

2.5.8 Electromagnetic Waves in Metals

通常、絶縁体 (ガラスなど) では束縛された電子のみを考えますが、金属には自由に動ける ** 自由電子 (Free Charges / Free Electrons) ** が存在します。これが光 (電磁波) と強く相互作用し、金属特有の反射や色を生み出します。

アプローチ: マクスウェル方程式を直接解く代わりに、ミクロな視点から ** 誘電関数 (Dielectric Function) ** を導出することで、金属の光学的性質を記述します。

2.5.9 ドルーデモデル (Drude Model)

電子は電磁波の電場 (\vec{E}) によって揺さぶられますが、原子核 (格子) と衝突して減速します。これを **摩擦 (Damping / Resistance) ** として扱います。原子内の電子と違い、元の位置に戻ろうとする「復元力」がないのが特徴です。

運動方程式 (Equation of Motion):

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m_e \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = -e \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

慣性項 ($m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$): 加速度。

減衰項 ($m_e \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$): 摩擦抵抗。 Γ (ガンマ) は衝突頻度を表し、緩和時間 (Relaxation time, τ) の逆数 ($\Gamma = 1/\tau$) です。

外力項 ($-e \vec{E}_0 e^{i\omega t}$): 光の電場による駆動力。

ドルーデ誘電関数の導出 (Derivation of the Drude Dielectric Function)

ミクロな電子の動きを、マクロな物質の性質 (誘電率) に変換します。

変位の計算: 上記の運動方程式を解いて、電子の変位 \vec{r} を求めます。

分極 (Polarization, \vec{P}): 単位体積あたりの電気双極子モーメントです。自由電子密度を N とすると、 $\vec{P} = -Ne\vec{r}$ となります。

誘電関数 (ϵ_r): 電束密度 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ の関係を用いて、最終的に以下の重要な式が得られます。【重要】ドルーデの誘電関数:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\Gamma\omega}$$

ここで登場する ω_p は、金属ごとの性質を決める非常に重要なパラメータです。

プラズマ周波数 (Plasma Frequency, ω_p):

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

これは電子集団が振動する固有の周波数で、多くの金属では紫外線 (UV) 領域にあります。

2.5.10 複素屈折率と導電率 (Complex Refractive Index & Conductivity)

光学的性質 (屈折率) と電氣的性質 (導電率) は密接に関係しています。

複素屈折率 (Complex Refractive Index, n):

$$n = n_r - i\kappa$$

実部 (n_r): 光の位相速度 (波の進む速さ) に関係します。虚部 (κ , Kappa): 吸光係数 (Extinction Coefficient) と呼ばれ、光の吸収 (エネルギー損失) を表します。

導電率 (Conductivity, σ): オームの法則 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ から導かれます。ドルーデモデルでは、高周波 (光の領域) での導電率と誘電関数は結びついており、光学測定から金属の電気伝導の情報を得ることができます。

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = Ne\vec{v}$$

where we explicitly wrote the current density on the right side. Following this relation, the conductivity is obtained as

$$\sigma = \epsilon_0 \omega_p^2 \frac{\tau(1 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

2.5.11 Reflectivity of Metals

なぜ金属はキラキラしているのでしょうか？反射率 (Reflectivity, R): フレネルの式により、屈折率 n から計算できます。

$$R = \left| \frac{n - 1}{n + 1} \right|^2$$

特徴: $\omega < \omega_p$ (可視光など): 多くの金属ではプラズマ周波数より低い周波数で、誘電関数の実部が負になり、反射率がほぼ 1 (100%) になります。これが金属光沢の原因です。 $\omega > \omega_p$ (紫外線など): 金属は透明になり、光を通すようになります。

2.5.12 分散関係と表皮効果 (Dispersion Relation & Skin Depth)

分散関係 (Dispersion Relation):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega)$$

プラズマ周波数より低い場合 ($\omega < \omega_p$)、波数 k は虚数になります。これは波が振動しながら進めず、指数関数的に減衰することを意味します (エバネッセント波 / Evanescent Wave)。

表皮深さ (Skin Depth, δ):

光が金属表面からどれくらいの深さまで侵入できるかを示す指標です。

$$\delta = \frac{1}{\text{Im}(k)}$$

低周波での近似: $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$ 可視光領域では、表皮深さはわずか数 10 nm (ナノメートル) 程度です。そのため、薄い金属膜でも光を通さず、不透明になります。これは「電磁シールド」や「表皮効果 (電流が表面しか流れない現象)」の基礎となります。

2.5.13 プラズモニクス (Plasmonics)

自由電子の集団振動 (プラズモン) と光の相互作用を扱う応用分野です。

局在表面プラズモン (Localized Surface Plasmons, LSPs):

金属ナノ粒子 (金や銀の微粒子) 中の電子振動です。特定の色の光を強く散乱・吸収します。

例: 講義ノートにある「リュクルゴスの杯 (Lycurgus Cup)」は、ナノ粒子を含んでいるため、反射光では緑、透過光では赤に見えます。

表面プラズモンポラリトン (Surface Plasmon Polaritons, SPPs):

金属と誘電体の境界面を伝わる波です。

応用: 境界面の屈折率変化に非常に敏感なため、バイオセンサー (Biosensing) などに利用されます (特定の分子がくっついたことを検知できる)。

The dispersion relation for SPPs is given by:

$$k_{SPP} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d}}$$

where ϵ_m and ϵ_d are the dielectric functions of the metal and dielectric, respectively. This unique dispersion relation allows SPPs to concentrate light into subwavelength volumes, enabling applications in sensing, waveguiding, and imaging beyond the diffraction limit.

2.6 Anisotropic Materials

2.6.1 Light propagation

これまで扱ってきた等方性材料 (Isotropic materials) では、光の速度はあらゆる方向で一定でした。しかし、結晶などの多くの物質は **** 異方性 (Anisotropic) **** を持ち、光の進む方向や偏光の向きによって光学的な性質が変化します。物理的イメージ: ノートにある **** エチレン分子 (Ethene, C_2H_4) **** を例に考えます。炭素間の二重結合 (Double bond) に平行な方向に電場がかかると、電子は動きやすく、分極 (Polarization) が大きくなります。逆に垂直方向では動きにくくなります。電気分極率 (Electronic Polarizability, α) : 方向によって電子の動きやすさが異なるため、分極率は単なる定数 (スカラー) ではなく、方向依存性を持つ **テンソル (Tensor)** として扱う必要があります。

2.6.2 誘電率テンソルと主座標系 (Dielectric Tensor and Principal Coordinate System)

物質の応答を表すために、誘電率 (Dielectric constant, ϵ) や屈折率 (Refractive index, n) もテンソルになります。

電束密度と電場の関係

通常、電束密度 \vec{D} と電場 \vec{E} は平行ですが、異方性材料ではテンソル $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ を介して結ばれるため、一般に \vec{D} と \vec{E} は平行になりません。

$$\vec{D} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{E}$$

2.6.3 主座標系 (Principal Coordinate System)

適切な座標系 (主軸) を選ぶと、このテンソルは対角化され、計算が簡単になります。この座標系での誘電率テンソルは以下のようになります。

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

このとき、**主屈折率 (Principal refractive indices)** は誘電率の平方根で定義されます。

$$n_{ii} = \sqrt{\epsilon_{ii}}$$

これにより、**光学特性を屈折率楕円体 (Index Ellipsoid)** として視覚化できます。

An optical axis is now a propagation direction for which the refractive index does not depend on the direction of the electric field. For a biaxial material, there are two distinct directions for propagation, while there is only one for uniaxial.

2.6.4 エネルギーの流れと位相の伝搬 (Energy Flow vs Phase Propagation)

異方性材料における最も直感的でない現象の一つが、「光の波面が進む方向 (位相速度)」と「エネルギーが進む方向 (群速度)」が一致しないことです。

波数ベクトル (Wavevector, \vec{k})

: 位相の進む方向を表します。波面 (Wavefronts) に対して垂直です。

ポインティングベクトル (Poynting vector, \vec{S}) :

エネルギーの流れる方向を表します。 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ で定義されます。

重要な関係:

異方性媒質中では、 \vec{D} と \vec{E} が平行でないため、 \vec{k} と \vec{S} も平行になりません。 \vec{S} (エネルギーの流れ) は、 \vec{k} が描く曲面 (k-surface) に対して垂直な方向に進みます。これが、光線が 2 つに分かれる原因となります。

2.6.5 結晶の対称性と分類 (Symmetries: Uniaxial and Biaxial)

主屈折率の値によって、材料は以下のように分類されます。一軸性結晶 (Uniaxial Material) :

$$n_1 = n_2 \neq n_3$$

1 つの ** 光学軸 (Optical axis) ** を持ちます。二軸性結晶 (Biaxial Material) :

$$n_1 \neq n_2 \neq n_3$$

2 つの光学軸を持ちます。

2.6.6 固有モード：常光線と異常光線 (Normal Modes: Ordinary and Extraordinary rays)

ある方向に光が進むとき、偏光状態を変えずに伝搬できる特定の偏光方向 (固有モード) が 2 つ存在します。常光線 (Ordinary ray, o-ray) : 屈折率が方向によらず一定 (n_o) の成分。電場は主平面 (光学軸と進行方向を含む面) に垂直です。異常光線 (Extraordinary ray, e-ray) : 屈折率が方向によって変化する (n_e) 成分。電場は主平面内に成分を持ちます。任意の偏光は、これら 2 つのモードの重ね合わせとして表現されますが、それぞれの速度 (屈折率) が違うため、伝搬するにつれて偏光状態が変化します

2.6.7 k 曲面 (波数ベクトル曲面) と分散関係 (The k-surface)

光の周波数を固定したとき、可能な波数ベクトル \vec{k} の集合が描く曲面を k 曲面と呼びます。これはマクスウェル方程式から導かれます。導出の概略: 以下の式を出発点とします。

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r \vec{E} = 0$$

これから $\vec{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ に関する方程式が得られます。一軸性結晶の場合:k 曲面は以下の 2 つのシート (面) から成ります。球面: 常光線 (o-ray) に対応。楕円面: 異常光線 (e-ray) に対応。この 2 つの面が接する方向が光学軸です。この方向では、常光線と異常光線の速度が一致します。

2.6.8 複屈折 (Birefringence)

光が異方性材料に入射すると、常光線と異常光線で屈折率が異なるため、光線が 2 方向に分かれる現象です。

現象:

方解石 (Calcite) などを通して文字を見ると二重に見えます。

物理的意味:

2 つのモードの波面は平行のまま進みますが、エネルギーの流れ (ポインティングベクトル \vec{S}) が異なる方向を向くため、ビームが空間的に分離します。

応用:

偏光ビームスプリッター (Polarizing beam splitters)。グラン・トムソンプリズムやウォラストンプリズムなど。

2.6.9 波長板 (Wave Retarders)

複屈折を利用して、光の偏光状態を操作する素子です。常光線と異常光線の速度差（屈折率差 $n_e - n_o$ ）を利用して、位相差（Phase shift, $\Delta\phi$ ）を生じさせます。

位相差の式:

厚さ d の結晶を通ったときの位相差は以下の通りです。

$$\Delta\phi = (n_e - n_o)k_0d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$$

(ここで k_0 は真空中での波数)

1/4 波長板 (Quarter Wave Plate, QWP)

機能: 直線偏光を円偏光に（またはその逆）変換します。

条件: 位相差が $\pi/2$ (90 度) になるように厚さを調整します。

最小厚さ:

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)}$$

1/2 波長板 (Half Wave Plate, HWP)

機能: 直線偏光の向きを回転させます。

条件: 位相差が π (180 度) になるようにします。

回転: 光学軸に対して角度 θ で入射した直線偏光は、光学軸の反対側に 2θ だけ回転して出射されます。最小厚さ:

$$d = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)}$$

2.7 Optical Activity and Rotatory Dispersion

まず、光学活性とは、特定の分子が「偏光面を回転させる (rotate the plane of polarized light)」現象のことです。これは単なる物理現象ではなく、分子構造と光の相互作用による量子力学的・電磁気学的な効果です。

2.7.1 電磁気学的メカニズム：双極子モーメントの結合

光がキラル分子 (Chiral molecules) (鏡像と重なり合わない分子) と相互作用すると、分子内に以下の 2 つのモーメントが誘導されます。

電気双極子モーメント (Electric dipole moment, \vec{p})

磁気双極子モーメント (Magnetic dipole moment, \vec{m})

通常、光の電場は電気双極子のみを、磁場は磁気双極子のみを誘起しますが、キラル分子ではこれらが「結合 (Coupled)」し、以下の式で表される相互作用が生まれます。

$$\vec{p} = \alpha\vec{E} + G\vec{B}$$

$$\vec{m} = G\vec{E} + \beta\vec{B}$$

ここで各変数は以下の通りです：

α : Electric polarizability tensor (電気分極率テンソル)

β : Magnetic polarizability tensor (磁気分極率テンソル)

G : Mixed electric-magnetic polarizability tensor (電気・磁気混合分極率テンソル)

\vec{E}, \vec{B} : 光の電場と磁場

重要な点: テンソル G は、キラルな分子においてのみ存在します。この G が存在することが、次に説明する「円複屈折」の直接の原因となります。

2.7.2 円複屈折とその電子的起源 Circular Birefringence (円複屈折)

直線偏光 (Plane-polarized light) は、数学的および物理的に、左回りと右回りの 2 つの円偏光 (Circular components) の重ね合わせとして分解できます。

$$\vec{E}_{plane} = \vec{E}_{right} + \vec{E}_{left}$$

混合分極率 G の影響により、分子は左右の円偏光に対して異なる応答を示します。これにより、左右それぞれの屈折率 (Refractive indices) に差が生じます。

右円偏光 (n_R) と左円偏光 (n_L) の屈折率を以下のように記述しています。

$$n_R = n_0 + \frac{2\pi N}{n_0}(G' - iG'')$$

$$n_L = n_0 - \frac{2\pi N}{n_0}(G' - iG'')$$

n_0 : 平均屈折率 (Average refractive index) N : 分子数密度 (Number density of molecules) G', G'' : G の実部と虚部

旋光角 (Rotation Angle)

左右の屈折率に差がある ($n_L \neq n_R$) ため、光が物質中を進むと偏光面が回転します。単位長さあたりの回転角 α は以下の式で導かれます。

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda}(n_L - n_R) = \frac{4\pi^2 N}{\lambda n_0} G'$$

この式から、旋光角は波長 λ に反比例し、混合分極率の実部 G' に比例することがわかります

2.7.3 量子力学的基礎 Quantum Mechanical Foundation

マクロなパラメータである G は、ミクロな量子レベルでは「電子遷移 (Electronic transitions)」に由来します。これを表す式は以下の通りです。

$$G = \frac{1}{\hbar} \sum_n \frac{\omega_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \text{Im}(\langle 0|\vec{\mu}|n\rangle \cdot \langle n|\vec{m}|0\rangle)$$

この式は非常に重要で、以下の 3 つの要素を結びつけています。

- 電子遷移 (ω_{n0}): 基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|n\rangle$ への遷移エネルギー。
- 電子の空間配置: 電気双極子遷移モーメント $\langle 0|\vec{\mu}|n\rangle$ と磁気双極子遷移モーメント $\langle n|\vec{m}|0\rangle$ の内積。
- 分子のキラリティ: これら 2 つのモーメントが直交せず、特定方向成分を持つ (ヘリカルな電荷の動きがある) 場合にのみ G が非ゼロになります

2.7.4 コットン効果と波長依存性 The Cotton Effect (コットン効果)

旋光度は光の波長によって変化します（旋光分散 Optical Rotatory Dispersion）。特に、分子が光を吸収する波長（吸収帯）付近では、「コットン効果」と呼ばれる特異な挙動を示します。これは以下の 2 つの項の和で数式化されます。

$$[\alpha]_{\lambda} = \sum_i \frac{A_i \lambda}{\lambda^2 - \lambda_i^2} + \sum_j \frac{B_j \lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)^2}$$

第 1 項 (Normal dispersion): 吸収帯から離れた領域での通常の旋光分散を表します。

第 2 項 (Anomalous dispersion): 吸収波長 (λ_j) 付近で重要になる項です。

現象の特徴:

電子遷移の波長に近づくと、旋光度は急激に増大し、符号が反転することさえあります（例：プラスからマイナスへ急変する）。これをコットン曲線 (Cotton curve) と呼びます。これは分子の立体配座 (Conformations) や電子状態を調べるための強力なツールとなります。

2.7.5 砂糖水溶液におけるケーススタディ Sugar Solutions

砂糖分子は不斉炭素 (Asymmetric carbon centers) を持ち、光学活性を示します。電子の動き光と相互作用する際、電子は以下のような「らせん状の経路 (Helical path)」を辿ると記述されます。

$$\Psi_{electron}(t) = \sum_i c_i \Psi_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_i)}$$

色付き散乱の 3 つの要因砂糖水溶液を通る光が色づいて散乱される現象は、以下の 3 つの効果の組み合わせです。

波長依存の回転 (Wavelength-Dependent Rotation): 青い光（短波長）は赤い光（長波長）よりも大きく回転します。これは ** 修正ドルーデの式 (Modified Drude equation) ** に従います。

$$\alpha(\lambda) = \frac{K}{\lambda^2} \left(1 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} \right)$$

ここで a, b は電子遷移を考慮した補正項です。

微分散乱 (Differential Scattering): 波長ごとに回転角が異なるため、散乱される角度 θ も波長ごとに異なります。

$$\theta(\lambda) \propto \alpha(\lambda)$$

これにより、虹のように色が空間的に分離されます。

多重散乱効果 (Multiple Scattering Effects): 光は溶液中で何度も散乱されます。散乱光の強度は以下の式に従います。

$$\vec{I}_{scattered}(\lambda) = \vec{I}_0(\lambda) e^{-\mu(\lambda)l} [1 - e^{-\sigma(\lambda)l}]$$

$\mu(\lambda)$: 吸収係数 (Absorption coefficient) $\sigma(\lambda)$: 散乱係数 (Scattering coefficient) l : 光路長

2.7.6 温度効果と応用 Temperature Effects & Applications

最後に、温度も光学活性に影響を与えます。

分子の回転速度: $\tau_c = \frac{4\pi\eta r^3}{3k_B T}$ (粘度 η や温度 T に依存)

配座の分布: $N_i \propto e^{-E_i/k_B T}$ (ボルツマン分布に従い、温度によって分子の形状分布が変わるため、観測される旋光度も変化します) 応用分野: これらの理論は、偏光計の設計、工業的な結晶化プロセス、医薬品分析 (キラル分離) などで不可欠な要素となっています。

2.8 Dipole Radiation

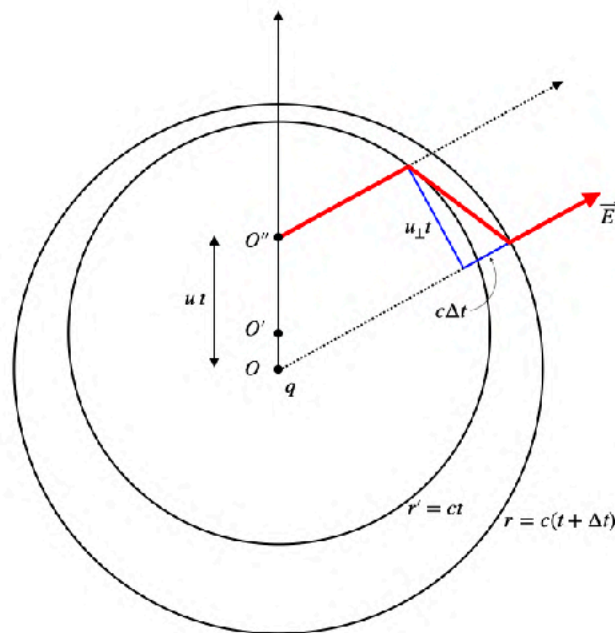
2.8.1 1. 加速電荷による電場の発生 (Electric Field of an Accelerated Charge)

ここでは、「なぜ電磁波（光）は横波（Transverse wave）なのか?」、そして「どのようにして電荷の加速が放射を生むのか」を幾何学的に説明しています。

重要なポイント:

情報の伝播速度の限界: 電荷が動いたという情報は、光速 c でしか伝わりません。

電場の「折れ曲がり (Kink)」: 電荷が点 O で静止していた時の電場は、外側に広がっています。電荷が短時間 Δt だけ加速して速度 u を得た後、等速運動して点 O'' に到達したとします。遠くの観測者（外側の円の外）はまだ「電荷は O にある」と思っています。一方、近くの観測者（内側の円の内）は「電荷は O'' にある」と知っています。この 2 つの領域をつなぐため、電力線 (Field line) は「シェル (殻)」の領域で折れ曲がる必要があります。この「折れ曲がり」こそが放射される電場の成分です。



式の導出:

電場の垂直成分（放射成分） E_{\perp} と、平行成分（クーロン場） E_{\parallel} の比率は、幾何学的な関係（速度成分の比）から以下のように求まります。

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{u_{\perp} t}{c \Delta t} = \frac{a_{\perp} \Delta t \cdot t}{c \Delta t} = \frac{a_{\perp} r}{c^2}$$

ここで、 $t = r/c$ （情報が到達する時間）を用いました。 E_{\parallel} は通常のクーロンの法則（ガウスの法則）から $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ であるため、これらを組み合わせると以下の重要な式が得られます。

$$E_{\perp} = -\frac{a_{\perp} q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

- 距離依存性: 通常の電場は $1/r^2$ で減衰しますが、放射電場は $1/r$ で減衰します。これが、電磁波が遠くまで届く理由です。
- 方向: この電場は球面に接する方向 (Tangential) を向いており、進行方向に対して垂直 (横波) です。

2.8.2 エネルギーの流れとポインティング・ベクトル (Energy Flow & Poynting Vector)

加速電荷がどれだけのエネルギーを放出するかを計算します。

ポインティング・ベクトル (Poynting vector): 電磁場のエネルギーの流れを表すベクトル \vec{S} です。

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

放射の指向性: 加速方向に対して垂直な方向 ($\theta = 90^\circ$) で最も強く放射され、加速方向 ($\theta = 0^\circ$) には放射されません。これは $\sin^2 \theta$ の項に現れます。

電場 E と磁場 $B (= E/c)$ の関係を代入すると、以下の式になります。

$$S(r, t) = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

(※ ノート内の定数表記を整理するとこの形になります) これを電荷を取り囲む球面全体で積分 ($\int \int S dA$) することで、総放射パワー (Total Power) が得られます。

2.8.3 ラーモアの公式 (Larmor's Formula):

非相対論的な加速電荷が放射する総エネルギーです。

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

2.8.4 振動双極子とレイリー散乱 (Oscillating Dipole & Rayleigh Scattering)

電荷がバネのように振動している場合 (原子が光を受けて揺さぶられている場合など) を考えます。これを振動双極子 (Oscillating Dipole) と呼びます。

- 双極子モーメント (Dipole Moment): $p = qx$
- 振動: 位置 x が周波数 ω で振動するとき、加速度は $a = -\omega^2 x$ となり、加速度は ω^2 に比例します。

先ほどの電場の式に、加速度 $a \propto \omega^2$ を代入すると、放射される電場は以下のようにになります (遠方場)。

$$E(r, t) \propto \omega^2 \frac{p}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

The intensity radiated by an oscillating dipole:

$$I(\theta) = \frac{\omega^4 |\vec{p}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} (1 - \cos^2(\theta)) \quad (2.7)$$

Radiated Power:

$$P = \frac{\omega^4 |\vec{p}|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \frac{c |\vec{p}|^2}{12\pi \epsilon_0} \quad (\text{radiated power of an oscillating dipole})$$

レイリー散乱 (Rayleigh Scattering):

現象: 光の波長 λ よりもずっと小さい粒子による散乱。

結論: パワーは波長の 4 乗に反比例します ($P \propto \lambda^{-4}$)。青い空: 青い光 (波長が短い) は、赤い光 (波長が長い) よりも約 10 倍強く散乱されるため、空は青く見えます。赤い夕日: 夕方は太陽光が大気中を長く通過するため、青い光は散乱されすぎてしまい、散乱されにくい赤い光だけが届きます。

2.8.5 ミー散乱とメタマテリアル (Mie Scattering & Metamaterials)

粒子のサイズが大きくなった場合や、人工的な物質についての記述です。Mie Scattering

- 粒子のサイズ d が波長 λ と同程度かそれ以上 ($d \geq \lambda$) の場合に適用されます。
- レイリー散乱のような単純な式ではなく、ベッセル関数などを含む複雑な級数解になります。
- 散乱の強さが波長にあまり依存しなくなるため、雲（水滴が大きい）は白く見えます。

Metamaterials

- 自然界にはない性質を持つように人工的に設計された構造です。
- 誘電率 (Permittivity, ϵ) や透磁率 (Permeability, μ) を周波数に依存する複素数として制御できます。
- 負の屈折率 (Negative refractive index): これにより、完全レンズ (Perfect lens) や透明マント (Cloaking) のような応用が可能になります。

2.9 Black Body Radiation

黒体放射 (Black Body Radiation) は、量子力学 (Quantum Mechanics) の誕生のきっかけとなった物理学上の極めて重要な問題です。

古典物理学の破綻: 19 世紀末、物理学者たちは熱を持った物体から出る光 (電磁波) のスペクトルを説明しようとしたが、古典物理学 (Classical Physics) の理論では説明できませんでした。

紫外発散 (Ultraviolet Catastrophe): 古典論である「レイリー・ジーンズの法則」を用いると、振動数 (周波数) が高くなる (= 波長が短くなる、紫外線領域など) につれて、放射エネルギーが無限大になってしまうという、実験事実と矛盾する結果が導かれました。

プランクの解決策: マックス・プランク (Max Planck) は、「エネルギーは連続的な値ではなく、離散的な『塊』 (量子: Quanta) として振る舞う」という革命的な仮説を導入し、この問題を解決しました。これが $E = h\nu$ という有名な式の基礎となり、ここから定数 h (プランク定数 / Planck's constant) が生まれました。

2.9.1 黒体とキルヒホッフの法則 (Blackbody and Kirchhoff's Law)

まず、理想的な放射源である「黒体」を定義します。

黒体 (Blackbody): 入射するすべての放射を完全に吸収し (反射しない)、かつその温度での最大の放射を行う理想的な物体のこと。その放射スペクトルは温度 (Temperature) のみに依存し、物体の材質には依存しません。

キルヒホッフの法則 (Kirchhoff's Law)

物体が熱平衡状態にあるとき、以下の関係が成り立ちます。

$$E_{\nu}^* = A_{\nu} S_{\nu}^*$$

E_{ν}^* (Spectral Emissivity / 分光放射率): 物体表面から放射されるエネルギー。

A_{ν} (Absorptivity / 吸収率): 物体が吸収するエネルギーの割合 (0 から 1 の間)。

S_{ν}^* (Spectral Radiance of ideal black body / 理想的な黒体の分光放射輝度): 黒体が放射するパワー。

Interpretation:

「よく吸収する物体は、よく放射する物体である (A_{ν} が大きいほど E_{ν}^* も大きい)」。黒体の場合、すべての光を吸収するため $A_{\nu} = 1$ となり、その放射は理論的最大値 S_{ν}^* となります。

レスリーの立方体 (Leslie Cube): 表面の材質 (黒塗り、磨かれた金属など) を変えた容器にお湯を入れ、放射を測定した実験。同じ温度でも表面状態によって放射量が異なり、吸収が良い面ほど放射も強いことを実証しました。

2.9.2 モード密度の導出 (Derivation of Spectral Density of Modes)

空洞 (Cavity) の中にどのような電磁波 (光) が存在できるかを考えます。壁が金属のような導体であれば、壁面で電場はゼロになるため、定常波 (Standing Wave) しか存在できません。

1 次元の場合

長さ a の箱の中での定常波の条件は、波数を k_z とすると以下のようになります。

$$k_z = \frac{o\pi}{a} \quad (o = 1, 2, 3, \dots)$$

3 次元の空洞共振器 (Cavity Resonator)

一辺 a の立方体の空洞を考えると、波数ベクトル \vec{k} の各成分は整数 n, m, o を用いて表されます。

$$k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{a}, \quad k_z = \frac{o\pi}{a}$$

角振動数 ω と波数の関係 $\omega = c_0|\vec{k}|$ より、許される振動数は以下のようになります。

$$\omega = c_0\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{o}{a}\right)^2}$$

モードの数を数える (Counting Modes)

k 空間 (n, m, o を軸とする空間) において、半径 R の球の体積を考えることで、ある振動数 ν までのモード数 N を計算します。 $n, m, o > 0$ の領域 (第 1 象限のみ、球全体の $1/8$) を考え、さらに光には偏光 (Polarization) が 2 種類あるため 2 倍します。

単位体積あたりの分光モード密度 (Spectral Density of Modes) $dn(\nu)$ は以下のようになります (導出過程はノートにある通り、球の体積を微分して求めます)。

$$dn(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} d\nu$$

これは、「振動数 ν が高くなるほど、存在できる波のパターン (モード) の数が 2 乗に比例して急激に増える」ことを意味します。

And we have

$$S_\nu^* = \frac{c_0}{4\pi} \omega_\nu \quad (2.8)$$

2.9.3 レイリー・ジーンズの法則 (Rayleigh-Jeans Law)

古典物理学のアプローチです。

等分配則 (Equipartition Theorem): 古典統計力学では、熱平衡状態にある 1 つのモード (自由度) あたり、平均エネルギー \bar{W}_ν は以下のように与えられます。

$$\bar{W}_\nu(T) = k_B T$$

(ここで k_B はボルツマン定数 / Boltzmann constant)

これと先ほどのモード密度を掛け合わせると、分光エネルギー密度 spectral energy density (単位体積あたり、単位振動数あたりのエネルギー) ω_ν が得られます。

$$\omega_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} k_B T d\nu$$

結果: 振動数 ν が低い (波長が長い) 領域では実験と合いますが、 ν が大きくなるとエネルギーが無限大に発散してしまいます (紫外発散)。これが古典論の限界でした。

2.9.4 プランクの法則 (Planck's Law)

プランクは、エネルギーが $h\nu$ という単位 (パケット) でしかやり取りされないと仮定しました。

ノートでは 2 通りのアプローチが紹介されていますが、ここでは統計力学 (Statistical Mechanics) による説明を中心にみます。エネルギー準位が $E_n = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と離散的であるとします。ボルツマン分布に従うと、あるモードがエネルギー $nh\nu$ を持つ確率は $P(n) \propto e^{-nh\nu/k_B T}$ となります。これを用いて平均エネルギー \bar{W}_ν を計算すると：

$$\bar{W}_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

これはボース・アインシュタイン分布 (Bose-Einstein Statistics) に由来する形です。

2.9.5 プランクの放射公式

モード密度 (先ほど導出した $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$) に、上記の平均エネルギーを掛け合わせます。

$$\omega(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c_0^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

これを波長 λ 表示の分光放射輝度 (Spectral Radiance) $S^*(\lambda, T)$ に変換すると、以下の有名な式になります。

$$S^*(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

この式は、低周波ではレイリー・ジーンズの法則に一致し、高周波ではゼロに収束するため、実験結果を完璧に説明しました。

2.9.6 プランク定数の測定 (Measuring Planck's Constant)

講義ノートでは、レーザー光を用いた光子計数 (Photon Counting) による測定法が紹介されています。

$$P = N \cdot \frac{hc}{\lambda} \implies h = \frac{P\lambda}{Nc}$$

P : レーザーのパワー λ : 波長 N : 1 秒あたりの光子数 c : 光速実際には APD (アバランシェ・フォトダイオード) などを用いて単一光子を検出し、その統計的性質 (ポアソン分布など) を利用して測定します。

2.9.7 関連する法則と応用 (Related Laws and Applications)

シュテファン・ボルツマンの法則 (Stefan-Boltzmann Law)

プランクの式を全波長で積分すると、総放射エネルギー E は温度の 4 乗に比例します。

$$E = \sigma T^4$$

(σ はシュテファン・ボルツマン定数) 応用例: 太陽定数の計算。太陽の表面温度 (約 5778K) から、地球に届くエネルギー (約 1361 W/m²) を計算できます。

ウィーンの変位則 (Wien's Displacement Law)

放射スペクトルがピーク (最大値) になる波長 λ_{max} は、温度に反比例します。

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (b \approx 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K})$$

意味: 温度が高いほど、放射される光の色は青っぽく (波長が短く) なり、温度が低いと赤っぽく (波長が長く) なります。

2.10 The Wave Character of Particles, Electron diffraction and de brogile wavelength

2.10.1 The Wave Character of Particles & de Broglie Wavelength

ルイ・ド・ブロイ (Louis de Broglie) は、古典力学 (Classical Mechanics) と光の量子モデル (Quantum Model) を融合させました。

粒子の運動量 (Momentum of a particle):

質量 m 、速度 v で動く粒子の運動量 p は次のように表されます。

$$p = m \cdot v$$

光子の運動量 (Momentum of a photon): 光の量子モデル (アインシュタイン等の理論) では、光子の運動量はプランク定数 \hbar (または h) と波数 k (または波長 λ) を用いて次のように書けます。

$$p = \hbar \cdot k = \frac{h}{\lambda}$$

ド・ブロイの仮説 (De Broglie's Hypothesis):

ド・ブロイは「粒子の運動量も光と同様に記述できる」と仮定し、上記 2 つの式を結合して粒子の波長 λ を導き出しました。

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

運動エネルギーとの関係式 (導出) 実験では速度 v よりも運動エネルギー (Kinetic Energy, E_{kin}) の方が測定・制御しやすいため、式を変形します。古典力学の運動エネルギーは $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ です。ここから運動量 p を逆算すると:

$$p = \sqrt{2mE_{kin}}$$

これを波長の式に代入すると、有名なド・ブロイ波長 (de Broglie wavelength) の式が得られます。

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

この式は、「すべての物質は波としての性質 (粒子と波の二重性 / Wave-particle duality) を持つ」という革命的な提案でした。

2.10.2 荷電粒子の加速 Accelerating Charged Particles

粒子の波動性を証明するには、粒子を高速に加速して波長を短くし、観測可能なレベルにする必要があります。

電子銃 (Electron Gun)

J.J. トムソンが発明した装置で、以下の原理で電子を加速します。

陰極 (Cathode) と陽極 (Anode) の間に電圧 (電位差) をかけます。

この電圧によって生じる電場 (Electric Field) が電子を加速します。

エネルギーの変換式

電圧 U によって電子 (電荷 e) が得るエネルギーは $e \cdot U$ です。これがすべて運動エネルギー E_{kin} に変わるとすると、以下の関係が成り立ちます。

$$E_{kin} = e \cdot U$$

2.10.3 デビソン=ガーマーの実験 Experiment by Davisson and Germer

1926年、ド・ブロイの仮説を実験的に証明した歴史的な実験です。ニッケル結晶に電子を当てて、波特有の現象である回折 (Diffraction) を観測しました。

実験の原理と式の導出

まず、加速電圧 U を使って電子の波長を計算します。先ほどのド・ブロイ波長の式 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$ に、 $E_{kin} = eU$ を代入します。

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U}}$$

m_e : 電子の質量 (Electron mass)

e : 電気素量 (Elementary charge)

h : プランク定数 (Planck's constant)

この式は、「加速電圧 U が上がれば上がるほど、波長 λ は短くなる (\sqrt{U} に反比例する)」ことを意味します。

2.10.4 ブラッグの法則 (Bragg's Law)

電子波が結晶の格子面 (Lattice planes) で反射する際、波が強め合う (建設的干渉 / Constructive interference) 条件は以下の法則に従います。

$$2d \sin \theta = n \cdot \lambda$$

d : 格子面間隔 (Distance between lattice planes)

θ : 入射角 (Angle of incidence) ※ ここでの θ は「結晶表面とビームのなす角」です。

n : 次数 (Order of the maximum)

2.10.5 原子および分子の回折 Atomic and Molecular Diffraction

電子 (素粒子) だけでなく、より大きな「原子」や「分子」でも波動性が確認されています。講義ノートでは 2 つの例が挙げられています。

原子回折 (Atomic Diffraction) 分子回折 (Molecular Diffraction)

2.11 Matter Waves

電子回折 (Electron diffraction) などの現象により、粒子が波の性質を持つことが確認されました。これを記述するために、まずは光 (電磁波) と同じような「平面波 (Plane waves)」の形を仮定 (Ansatz) することから始めます。

2.11.1 平面波

量 m の粒子が z 方向に進むときの波動関数 $\psi(z, t)$ は以下のように置かれます。

$$\psi(z, t) = C \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

ここで、ド・ブロイの関係式を用いて、粒子のエネルギーと運動量を波のパラメータと結びつけます。

運動エネルギー (Kinetic Energy): $E_{kin} = \hbar\omega$

運動量 (Momentum): $p = \hbar k$

これらを代入すると、波動関数は以下のようにも書けます。

$$\psi(z, t) = C \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(Et - pz)}$$

平面波の問題点：分散 (Dispersion)

ここで、位相速度 (Phase velocity, v_{ph}) について考えます。位相速度は波の山 (位相) が進む速さで、 $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ で定義されます。

光 (電磁波) の場合: 真空中の光速は一定 (c) なので、分散はありません ($dv_{ph}/d\omega = 0$)。

物質波の場合: 自由粒子のエネルギーは $E = \frac{p^2}{2m}$ です。これを波の式に変換すると:

$$\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \implies \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

これを用いて位相速度を計算すると:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\hbar k^2}{2m}}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

一方、粒子の実際の速度 (Classical particle velocity, v_p) は:

$$v_p = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$$

結論: $v_{ph} = \frac{1}{2}v_p$ となり、波の進む速さが粒子の速さの半分になってしまいます。また、物質波は分散 (Dispersion) を持ち、波長によって速さが変わるため、単一の平面波では粒子 (空間に局在した存在) を正しく記述できません。

2.11.2 ウェーブパケット (Wave Packets / Wave Trains)

平面波は全空間に無限に広がってしまいますが、実際の粒子は「局在 (Localized)」しています。そこで、波数が少しずつ異なる複数の平面波を重ね合わせる (Superposition) ことで、ある場所に波を集中させる ** ウェーブパケット (波束) ** を作ります。

2.11.3 重ね合わせの式

連続的な波の集まりとして積分形で表すと以下ようになります。

$$\psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} C(k) e^{i(\omega t - kz)} dk$$

ここで $C(k)$ は振幅分布です。

2.11.4 群速度 (Group Velocity)

波束全体 (振幅の最大点) が移動する速度を群速度 (v_g) と呼びます。強め合う干渉 (Constructive interference) が起こる条件は、位相の変化がないことです。中心波数 k_0 と周波数 ω_0 からのずれを考えたとき:

$$d(\omega t - kz) = 0 \implies d\omega \cdot t - dk \cdot z = 0$$

ここから群速度が導かれます:

$$v_g = \frac{z}{t} = \frac{d\omega}{dk}$$

先ほどの分散関係式 $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ を k で微分して確認します。

$$v_g = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right) = \frac{2\hbar k}{2m} = \frac{\hbar k}{m} = v_p$$

重要な結果: ウェーブパケットの群速度 v_g は、粒子の速度 v_p と完全に一致します。これにより、ウェーブパケットは粒子の運動を記述するのに適していることがわかります。

まとめ

波には 2 種類の速さがある。

位相速度 v_{ph} : 波の「山」が進む速さ。単一の、どこまでも続く波（平面波）の場合、この速度が波の速さそのものです。

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

物質波では $v_{ph} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{1}{2}v_p$ となり、粒子の速さの半分にしかならない。さらに v_{ph} は k に依存するため分散（Dispersion）が生じ、単一の平面波では粒子を正しく記述できない。

波束と群速度 v_g : 波束の「塊」が進む速さ

波長の異なる波を重ね合わせて局在した波束を作る。その包絡線が進む速さが群速度である。

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right) = \frac{\hbar k}{m} = v_p$$

群速度は粒子の速さと完全に一致する。

結論

	位相速度 v_{ph}	群速度 v_g
意味	波の山の速さ	波束全体の速さ
粒子速度と一致？	×（半分）	✓（一致）

波束こそが粒子の運動を正しく記述する表現であり、シュレーディンガー方程式へとつながる。

2.11.5 一定振幅のウェーブパケット (Constant Amplitude Wave Packets)

計算を簡単にするため、ある波数範囲 Δk の中で振幅 $C(k)$ が一定であると仮定した場合の解析です。分散関係を一次までテイラー展開 ($\omega(k) \approx \omega_0 + v_g(k - k_0)$) して積分を行うと、波動関数は以下の形になります。

$$\psi(z, t) = A(z, t)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

ここで、包絡線 (Envelope) $A(z, t)$ は Sinc 関数 ($(\sin x)/x$ の形) になります：

$$A(z, t) \propto \frac{\sin(\Delta k \cdot u/2)}{u}, \quad \text{ただし } u = v_g t - z$$

この結果から以下のことがわかります：

波束の中心は $u = 0$ すなわち $z = v_g t$ で移動する。

波束の空間的な幅 Δz と波数（運動量）の幅 Δk には逆の関係がある ($\Delta z \approx 4\pi/\Delta k$)。これが不確定性原理の数学的な起源です。

ガウス型ウェーブパケット (Gaussian Wave Packets)

一定振幅のパケットは不自然な「サイドローブ（脇の小さな波）」が生じるため、より物理的に自然なガウス分布 (Gaussian distribution) を振幅に用います。振幅分布

$$C(k) = C(k_0)e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}}$$

波束の広がり (Spreading of Wave Packet) ガウス型パケットの時間発展を計算すると、波束の幅 $\sigma(t)$ は時間とともに広がっていくことがわかります。

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right)^2}$$

σ_0 : 初期の幅 t : 経過時間 m : 質量意味: 質量のある粒子の波束は、時間が経つにつれて分散により空間的に広がっていきます（ぼやけていく）。軽い粒子ほど、また初期の幅が狭いほど、早く広がります。

2.11.6 物質波の統計的解釈 (Statistical Interpretation of Matter Waves)

マックス・ボルン (Max Born) により提案された、量子力学の根本的な解釈です。確率密度 (Probability Density) 波動関数 $\psi(z, t)$ 自体は直接観測できる物理量ではなく、その絶対値の二乗が「粒子をその場所に見出す確率密度」を表します。

$$P(z, t)dz = |\psi(z, t)|^2 dz$$

$|\psi|^2$: 確率密度関数。常に実数で非負です。規格化 (Normalization) 粒子は全空間のどこかには必ず存在しなければならないため、全空間での確率の合計は 1 になります。これを規格化条件と呼びます。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(z, t)|^2 dz = 1$$

(3次元の場合は体積積分 $\iiint |\psi|^2 dV = 1$ となります)

解釈のポイント

粒子は一点 (x, y, z) に存在するのではなく、波束の形に従って「ぼやけて (Smeared)」存在しています。波束の中心で粒子が見つかる確率が最も高いです。

2.11.7 測定との関係 (Relation to Measurement)

この確率は「測定」を行う瞬間に劇的な変化を起こします。

測定前: 粒子は広がりを持った重ね合わせの状態 (Superposition)。

測定: 観測を行うと、波動関数は一点に「収縮 (Collapse)」します。

測定後: 測定された位置を中心に、再び波束として広がり始めます。

2.12 Heisenbergs Uncertainty Relation

量子力学における最も基本的かつ重要な原理の一つです。

基本概念: 粒子の「位置」と「運動量」のような、互いに補完的 (Complementary) な物理量を、同時に無限の精度で測定することは不可能であるという原理です。

波の性質 (Wave-like nature): これは測定機器の性能不足によるものではなく、物質が持つ「波としての性質」に由来する、自然界の根本的な性質です。

2.12.1 Position-momentum uncertainty

ガウス型波束による導出 (Derivation with Gaussian Wave Packet)

粒子を、位置と時間が局在した「波束 (Wave packet)」として考えます。

波数空間の分布:

波数 k (運動量 $p = \hbar k$ に対応) の分布関数 $C(k)$ をガウス分布 (正規分布) と仮定します。

$$C(k) = C(k_0)e^{-(k-k_0)^2/2\Delta k^2}$$

ここで、 Δk は波数分布の標準偏差 (Standard Deviation) です。

位置空間への変換 (Fourier Transform):

位置空間での波動関数 $\psi(z, t)$ は、波数分布 $C(k)$ のフーリエ変換で与えられます。

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_0)e^{-(k-k_0)^2/2\Delta k^2} e^{i(kz-\omega t)} dk$$

計算結果 ($t = 0$ のとき): この積分を計算すると、位置空間での確率密度 $|\psi(z, 0)|^2$ もまたガウス分布になります。

$$|\psi(z, 0)|^2 = (2\pi\Delta k^2)^{-1/2} \cdot e^{-\Delta k^2 z^2}$$

No これを標準偏差の形 Δz で整理すると、以下の重要な関係が導かれます。

$$\Delta z = \frac{1}{2\Delta k}$$

計算結果 ($t = 0$ のとき):

この積分を計算すると、位置空間での確率密度 $|\psi(z, 0)|^2$ もまたガウス分布になります。

$$|\psi(z, 0)|^2 = (2\pi\Delta k^2)^{-1/2} \cdot e^{-\Delta k^2 z^2}$$

これを標準偏差の形 Δz で整理すると、以下の重要な関係が導かれます。

$$\Delta z = \frac{1}{2\Delta k}$$

上記の Δz と Δk の関係から、以下の積が得られます。

$$\Delta z \cdot \Delta k = \frac{1}{2}$$

ここで、運動量と波数の関係式 $p = \hbar k$ (したがって $\Delta p = \hbar \Delta k$) を用いると、最終的な不確定性原理の式になります。

$$\Delta z \cdot \Delta p = \Delta z \cdot \hbar \Delta k = \frac{\hbar}{2}$$

これが、ガウス型波束における最小の不確定性積です。一般的には以下の不等式で表されます。

$$\Delta z \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

例 1: 単スリットによる電子回折 (Electron diffraction at a single slit) 電子ビームが幅 b のスリットを通過する場合を考えます。位置の不確定性: スリットを通るため、電子の位置の不確定性はスリット幅になります。

$$\Delta x = b$$

運動量の不確定性: スリットを通ることで回折が起き、電子は角度 θ で広がります。これにより運動量 p_x に不確定性が生じます。

$$\Delta p_x \approx p \sin \theta$$

関係式: 回折の式 $b \sin \theta = \lambda$ と、ド・ブロイ波長 $\lambda = h/p$ を組み合わせると、

$$\Delta p_x \approx p \cdot \frac{\lambda}{b} = p \cdot \frac{h/p}{b} = \frac{h}{b}$$

結果として、積は以下のようになります。

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx b \cdot \frac{h}{b} = h$$

粒子を顕微鏡で観察する場合、光 (光子) を当てる必要があります。位置の精度: 光の波長 λ と対物レンズの開口角 α によって決まる分解能 (エアリーディスクの直径) に制限されます。

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

運動量の変化: 粒子は光子と衝突し、光子が散乱される際に運動量を受け取ります (コンプトン効果)。その不確定性は以下で近似されます。

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

積: これらを掛け合わせると、やはり定数程度になります。

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

※ 波長 λ を短くして位置精度 Δx を上げようとする、光子の運動量が増え、 Δp_x が大きくなってしまいうトレードオフが存在します。例 3: ガウシアンビームのウエスト (Gaussian Beam Waist) レーザー光学におけるビームの集光と広がり関係も、不確定性原理の一例です。ビームウエスト (w_0): 最も絞られた部分の半径 (位置の不確定性 Δx に対応)。広がり角 (θ): ビームの広がり (運動量の不確定性 Δp に対応)。関係式:

$$w_0 \cdot \theta \geq \frac{\lambda}{\pi}$$

ビームを小さく絞ろうとする (w_0 を小さくする) と、必然的にビームの広がり角 θ は大きくなります。

2.12.2 エネルギーと時間の不確定性 (Energy-time uncertainty)

位置と運動量だけでなく、「エネルギー」と「時間」の間にも同様の不確定性が存在します。

導出 (Derivation)

時間的な波束を考え、周波数 ω (エネルギー $E = \hbar\omega$ に対応) について積分します。

$$\psi(z, t) = \int C(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

位置・運動量のとくと同様の数学的展開 (フーリエ変換の性質) により、以下の関係が導かれます。

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

具体的な意味と例

意味: エネルギーを正確に測定しようとするれば長い観測時間 Δt が必要であり、逆に短い時間 Δt しか存在しない現象のエネルギーは不確定さが大きくなります。

例 1: 自然放出 (Spontaneous Emission): 励起状態の原子が寿命 τ で光子を放出する場合、そのエネルギー (スペクトル線幅) は完全に一定ではなく、幅 $\Delta E \approx \hbar/\tau$ を持ちます。

例 2: 仮想粒子 (Virtual Particles): 量子場の理論では、非常に短い時間 Δt であれば、エネルギー保存則を破って粒子 (電子・陽電子対など) が生成・消滅することが許されます ($\Delta E \approx \hbar/\Delta t$)。

現代的な解釈 (Modern Interpretations) ハイゼンベルクの当初の解釈と、現代の量子力学における解釈には違いがあります。

測定による攪乱 (Measurement Disturbance - Old View): 「測定行為が対象を乱すから不確定になる」というハイゼンベルクの当初の解釈 (ガンマ線顕微鏡の例など)。これは直感的ですが、現代では不完全だとされています。

固有の性質 (Intrinsic Property - Modern View): 不確定性は測定とは無関係に、量子状態そのものが持つ固有の性質です。量子が「波」として記述される以上、フーリエ変換の数学的性質として、位置と運動量 (あるいは時間とエネルギー) を同時に一点に定めることは原理的に不可能です。

準備の不確定性 (Preparation Uncertainty): どんなに精密な実験装置を使っても、不確定性関係を破るような量子状態を「準備 (作成)」すること自体が不可能であるという解釈です。

2.13 The Structure of Atoms and the Bohr Model

ラザフォードの原子模型において、原子は「小さく重い原子核」と「広大な電子雲」で構成されていることが分かりましたが、古典物理学ではその安定性を説明できないというパラドックス (矛盾) が生じました。

原子の構成 (Atomic Structure):

原子核 (Nucleus):

サイズは非常に小さい ($R_C < 10^{-14}$ m) が、原子質量の大部分を占め、正の電荷 ($Q = Z \cdot e$) を持ちます。

電子雲 (Electron Cloud):

原子核の体積の $10^{12} \sim 10^{15}$ 倍の広がりを持ちますが、質量への寄与は無視できるほど小さいです。

安定性のパラドックス (Stability Paradox):

もし電子が静止 (Static) していれば、静電気力 (クーロン引力) で核に引き寄せられ、原子は潰れてしまいます。

もし電子が運動 (Motion) していれば、古典電磁気学 (Classical Electrodynamics) の法則により、加速する電荷は常に電磁波を放出してエネルギーを失い、最終的に核に螺旋状に落下してしまうはずですが。

しかし現実の原子は安定しています。これを解決するには量子力学 (Quantum Mechanics) の導入が必要でした。

2.13.1 量子力学的安定性とハイゼンベルクの不確定性原理 (Quantum Origin of Stability & Heisenberg's Uncertainty Principle)

なぜ電子は原子核に落ち込まないのか？その答えは「位置と運動量の不確定性」にあります。電子を狭い領域に押し込めようとするすると運動量が増大し、その結果生じる運動エネルギーの増加が、静電気力による引力と釣り合うのです。

位置と運動量の不確定性 (Position-Momentum Uncertainty):

水素原子の電子が半径 a の範囲にあるとすると、位置の不確定性 Δr は以下のように置けます。

$$\Delta r \leq a$$

ハイゼンベルクの不確定性原理により、運動量の不確定性 Δp には下限が生じます。

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{a}$$

したがって、実際の運動量 p も少なくともこの大きさである必要があります。

$$p \geq \frac{\hbar}{a}$$

エネルギーの競合 (Energy Considerations):

この運動量の制約から、最小の運動エネルギー (Kinetic Energy) が決まります。

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

一方、静電ポテンシャルエネルギー (Electrostatic Potential Energy) は以下の通りです。

$$E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

よって、全エネルギー E は以下の式のようにになります。

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

基底状態の導出 (Finding the Ground State):

原子はエネルギーが最小になる状態で安定します。全エネルギーを半径 a で微分して 0 と置くことで、安定する半径を求めます。

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 0$$

これを a について解くと、最小半径 a_{min} が求まります。これがボーア半径 (Bohr Radius) a_0 と一致します。

$$a_{min} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = a_0$$

この時の最小エネルギー E_{min} はリュードベリ・エネルギー (Rydberg Energy) となります。

$$E_{min} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -Ry^*$$

2.13.2 原子スペクトル (Atomic Spectra)

原子は特定の波長の光しか吸収・放出せず、それは元素ごとに固有のパターン (線スペクトル) を持ちます。これは原子内のエネルギーが連続的ではないことを示唆しています。

線スペクトル (Line Spectra):

プリズムを通すと、連続的な虹色ではなく、特定の位置に暗い線 (吸収線) や明るい線 (輝線) が現れます。

バルマー系列 (Balmer Series): 1885 年、バルマーは水素の放出スペクトルが以下の法則に従うことを発見しました。

$$\frac{1}{\lambda_k} = Ry \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

ここで Ry はリュードベリ定数 (Rydberg Constant)、 n_1, n_2 は整数です。

バルマー系列 (Balmer Series): $n_1 = 2$

(可視光領域) ライマン系列 (Lyman Series): $n_1 = 1$

(紫外線領域) パッシェン系列 (Paschen Series): $n_1 = 3$ (赤外線領域)

2.13.3 ボーア・モデル (The Bohr Model)

ニールス・ボーアは、電子が特定の軌道 (円軌道) のみを回ることができ、その軌道上ではエネルギーを放出せずに安定するというモデルを提案しました。

前提条件と力の釣り合い (Force Equilibrium):

電子 (質量 m_e) が原子核 (質量 m_n) の周りを回る系において、換算質量 (Reduced Mass) μ を用いて記述します。

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_n}{m_e + m_n} \approx m_e$$

遠心力とクーロン力 (求心力) の釣り合いから:

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

量子化条件 (Quantization Condition):

ボーアは電子を粒子としてだけでなく物質波 (Matter Wave) としても捉えました。軌道が安定して存在するには、軌道の円周がド・ブロイ波長の整数倍でなければなりません (定常波の形成)。

$$2\pi r = n \cdot \lambda_D$$

ここで $\lambda_D = h/(\mu v)$ なので、電子の速度 v は以下のように制限されます。

$$v = \frac{n \cdot h}{2\pi\mu r}$$

軌道半径とエネルギーの量子化: 速度 v の式を力の釣り合いの式に代入すると、離散的な軌道半径 $r(n)$ が導かれます。

$$r(n) = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2} \frac{n^2}{Z} = a_0 \frac{n^2}{Z}$$

ここで n は主量子数 (Principal Quantum Number) です。また、全エネルギー $E(n)$ も同様に量子化されます。

$$E(n) = -\frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{Z^2}{n^2} = -Ry^* \frac{Z^2}{n^2}$$

これは、 n が決まればエネルギーが決まる（飛び飛びの値しかとらない）ことを意味します。

遷移と光の放出 (Transitions):

電子が高いエネルギー準位 (E_k) から低い準位 (E_i) へ移る時、その差分のエネルギーを持つ光子 (Photon) を放出します。

$$h\nu = E_k - E_i$$

これから導かれる波長の式は、バルマーの式と完全に一致します。

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right)$$

2.13.4 ボーア・ゾンマーフェルト・モデル (The Bohr-Sommerfeld Model)

ボーア・モデルを拡張し、楕円軌道や相対論的效果を取り入れたモデルです。

楕円軌道 (Elliptical Orbits): 円軌道だけでなく、楕円軌道を導入しました。これにより新たな量子数が導入されました (方位量子数 l 、磁気量子数 m など)。

ウィルソン・ゾンマーフェルトの量子化条件 (Wilson-Sommerfeld Quantization Rules): 一般化された運動量 p と座標 q に対して以下の積分がプランク定数の整数倍になるという条件です。

$$\oint p_i dq_i = n_i h$$

成果: スペクトル線の微細構造 (Fine Structure) (一本に見える線が実は分裂していること) などを説明できるようになりました。

2.13.5 フランク・ヘルツの実験 (Franck-Hertz Experiment)

原子のエネルギー準位が飛び飛び (離散的) であることを、光ではなく「電子の衝突」によって直接証明した実験です。

実験の仕組み: 水銀蒸気の中で電子を加速させます。電圧を上げていくと、電子の運動エネルギー $E_k = eV$ が増加します。

弾性衝突と非弾性衝突: エネルギーが低い時: 電子は水銀原子と弾性衝突 (Elastic Collision) し、エネルギーをほとんど失いません (電流は増加)。エネルギーが特定の閾値 (水銀では 4.9eV) に達した時: 電子は水銀原子にエネルギーを与えて励起させる非弾性衝突 (Inelastic Collision) を起こします。

結果: 電子はエネルギーを失うため、電流が急激に下がります。これが 4.9V ごとに周期的に繰り返されます。

$$E_2 - E_1 = 4.9 \text{ eV}$$

これは、水銀原子が 4.9eV という特定のエネルギーしか受け取らない (=エネルギー準位が量子化されている) ことを証明しました。

2.14 The Schrödinger Equation

平面波 (Plane Waves): これまでの講義で扱った $\psi(x, t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ という形です。これは基本的な波ですが、空間全体に広がっているため、特定の場所に存在する「粒子」を表すには適していません。

波束 (Wave Packets): 粒子のように「空間的に局在 (localized)」した状態を表すために、複数の平面波を重ね合わせた「波束」という概念を導入する必要があります。

2.14.1 時間依存シュレーディンガー方程式の導出 (Derivation of Time-Dependent Schrödinger Equation)

古典力学のエネルギー保存則から出発し、量子力学の基礎方程式を導きます。

古典的エネルギー保存則: 全エネルギー E は、運動エネルギー E_{kin} とポテンシャルエネルギー E_{pot} (または $V(x)$) の和です。

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

(p : 運動量, m : 質量)

演算子の導入 (Operators): 波動関数 $\psi(x, t) = Ae^{i(px - Et)}$ の形を参考に、物理量を以下の微分演算子に置き換えます。エネルギー (Energy): $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 運動量 (Momentum): $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

時間依存シュレーディンガー方程式 (Time-Dependent Schrödinger Equation): 上記の演算子をエネルギー保存の式に適用することで導かれます。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi$$

左辺: 時間変化を表します。

右辺第 1 項 ($-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$): 運動エネルギー成分。波束が空間的にどう広がるかを決定します。

右辺第 2 項 ($V(x)\psi$): ポテンシャルエネルギー成分。外力が波動関数にどう影響するかを示します。

2.14.2 定常シュレーディンガー方程式 (Stationary Schrödinger Equation)

エネルギーが確定している状態 (定常状態) を考えます。

変数分離: 波動関数を空間成分と時間成分に分けます: $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$

導出: これを時間依存方程式に代入すると、左辺の時間微分から E が出てきます。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi = E\psi$$

これが「定常シュレーディンガー方程式」です。

意味: これは光学におけるヘルムホルツ方程式 (Helmholtz equation) に似ており、確率分布の「定在波 (standing wave)」を表します。原子のエネルギー準位が飛び飛び (量子化) になる理由を説明する式です。

2.14.3 境界条件 (Boundary Conditions)

方程式を解く際に満たさなければならない 3 つの条件です。

連続性: 波動関数 $\psi(x)$ はどこでも連続でなければならない。

滑らかさ: その 1 階微分 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ も連続でなければならない。

二乗可積分: 確率が無限大にならないよう、 $\int |\psi(x)|^2 dx < \infty$ でなければならない。

2.14.4 ポテンシャル障壁：ステップ型 (A Potential Barrier / Step)

Region 1 - $x < 0$:

In the first region where $V = 0$, the stationary Schrödinger equation is:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x)$$

The solution is a combination of incoming and reflected waves:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

where $k = \sqrt{2mE}/\hbar$

Region 2 - $x \geq 0$:

In the second region where $V = V_0$, the Schrödinger equation becomes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V_0\psi = E\psi$$

The solution here is:

$$\psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

where $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$

To connect these solutions, we need two boundary conditions at $x = 0$:

1. The wave function must be continuous:

$$A + B = C + D$$

2. Its derivative must be continuous:

$$ik(A - B) = \alpha(C - D)$$

The case $E < V_0$

In the case $E < V_0$, α is real and we set $C = 0$ to prevent ψ_2 diverging as $x \rightarrow \infty$. The boundary conditions give:

$$B = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} A$$

$$D = \frac{2ik}{ik - \alpha} A$$

The wave function in region 1 ($x < 0$) is:

$$\psi_1(x) = A \left(e^{+ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx} \right)$$

The reflection coefficient, comparing reflected and initial wave intensities, is:

$$R = \frac{|B \cdot e^{-ikx}|^2}{|A \cdot e^{+ikx}|^2} = \frac{|ik + \alpha|^2}{|ik - \alpha|^2} = 1$$

This shows total reflection, as expected for $E < V_0$. However, quantum mechanics reveals that particles still penetrate slightly into region 2 ($x \geq 0$).

The case $E > V_0$

When $E > V_0$, particles can classically enter region 2 with reduced kinetic energy $E_{kin} = E - V_0$. In quantum mechanics, α becomes imaginary, so we define a real wave number:

$$\kappa = i\alpha = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

which means now that $\alpha = -i\kappa$. The wave function in region 2 becomes:

$$\psi_2(x) = C \cdot e^{-i\kappa x} + D \cdot e^{+i\kappa x},$$

with $\psi_1(x)$ unchanged from before.

The boundary conditions at $x = 0$ require:

$$\begin{aligned} \psi_1(x = 0) &= \psi_2(x = 0) \\ \rightarrow A + B &= C + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x = 0) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x = 0) \\ \rightarrow ik(A - B) &= -i\kappa C + i\kappa D. \end{aligned}$$

Since no wave reflects from infinity, $C = 0$. This gives:

$$\begin{aligned} B &= \frac{k - \kappa}{k + \kappa} A \\ D &= \frac{2k}{k + \kappa} A \end{aligned}$$

resulting in:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A \left(e^{+ikx} + \frac{k - \kappa}{k + \kappa} e^{-ikx} \right) \\ \psi_2(x) &= A \frac{2k}{k + \kappa} e^{+i\kappa x}. \end{aligned}$$

反射と透過: 境界条件から係数を求めると、反射係数 R と透過係数 T が得られます。反射係数: $R = \frac{|k - \kappa|^2}{|k + \kappa|^2} = \frac{|n_1 - n_2|^2}{|n_1 + n_2|^2}$ これは屈折率の異なる媒質 (n_1, n_2) 間の光の反射率の式 (フレネルの式の一部) と全く同じ形をしています。透過係数: $T = \frac{4k\kappa}{(k + \kappa)^2}$

保存則: 常に $R + T = 1$ が成り立ちます。エネルギーが障壁 V_0 に近づくと反射が増え、 $E = V_0$ で完全に反射されます。

2.15 Potential barriers and wells

講義の冒頭では、量子力学における粒子の振る舞いを記述するシュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation) について触れています。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi = E\psi$$

この式を解くために、波動関数 $\psi(x)$ が満たすべき以下の 3 つの境界条件 (Boundary Conditions) が重要となります。

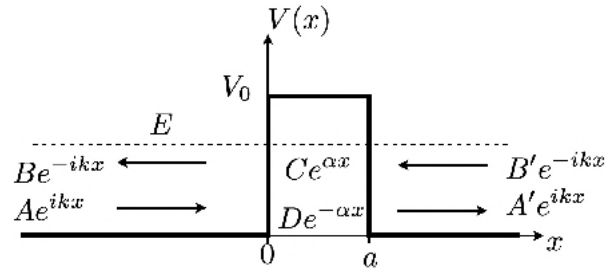
連続性 (Continuity of Wave Function): 波動関数 $\psi(x)$ はどこでも連続でなければならない (途切れてはいけません)。

微分の連続性 (Continuity of First Derivative): 波動関数の一次導関数 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ も連続でなければならない (滑らかにつながる)。

二乗可積分 (Square Integrable): 粒子の存在確率は有限であるため、 $\int |\psi(x)|^2 dx < \infty$ を満たす必要がある。

2.15.1 ポテンシャル障壁とトンネル効果 (Potential Barrier & Tunneling Effect)

ここでは、有限の幅 a と高さ V_0 を持つポテンシャル障壁に入射する粒子を考えます。



領域 1 (Region 1, $x < 0$): 障壁の手前。入射波と反射波が存在。 $\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

領域 2 (Region 2, $0 \leq x \leq a$): 障壁内部。エネルギーが障壁より低い場合 ($E < V_0$)、指数関数的に減衰・増大する解となる。 $\psi_2 = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$ (ここで $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$)

領域 3 (Region 3, $x > a$): 障壁の向こう側。透過波のみが存在。 $\psi_3 = A'e^{ikx}$

2.15.2 トンネル効果 (The Tunneling Effect)

古典力学では、エネルギーが障壁より低い粒子 ($E < V_0$) は障壁を越えられません。しかし、量子力学では波動関数が障壁内でゼロにならず、領域 3 へ染み出すことで透過が可能になります。これをトンネル効果と呼びます。

境界条件 ($x = 0$ と $x = a$ で ψ と $d\psi/dx$ が連続) を用いて連立方程式を解くことで、透過係数 (Transmission Coefficient) T が導かれます。

透過確率の式:

$$T(E, a) = \left| \frac{A'}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\alpha a)}$$

近似式 (障壁が厚いまたは高い場合 $\alpha a \gg 1$):

$$T \approx \frac{16E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2\alpha a}$$

この式は、障壁の幅 a や高さ α (エネルギー差に依存) が増えると、透過確率が指数関数的に減少することを示しています。

共鳴透過 (Resonant Transmission):

エネルギーが障壁より高い場合 ($E > V_0$) でも、反射が起こる可能性があります。特定の条件 (障壁内で波が定在波を作るような条件 $\lambda = 2a/m$) では反射がゼロになり、透過率が 1 ($T = 1$) になる現象が見られます。

2.15.3 トンネル効果の応用 (Applications)

走査型トンネル顕微鏡 (Scanning Tunneling Microscopy, STM):

鋭い金属探針を試料表面に近づけ、その間に流れるトンネル電流 (Tunneling Current) を測定します。

電流は距離に対して指数関数的に変化するため、原子レベルの解像度で表面の凹凸を画像化できます。

電界放射顕微鏡 (Field Emission Microscopy):

金属表面に強い電界 F をかけると、ポテンシャル障壁が三角形に変形し、電子がトンネル効果で外部へ放出されます。

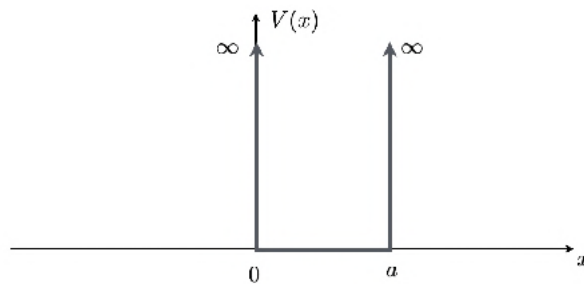
この時の電流密度 j はファウラー・ノードハイムの式 (Fowler-Nordheim equation) で記述されます。

$$j \approx \frac{e^3 F^2}{8\pi h \phi} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}\phi^{3/2}}{3\hbar e F}\right)$$

電界強度 F に強く依存するのが特徴です。

2.15.4 無限井戸型ポテンシャル (Potential Well with Infinite Depth)

次に、粒子を特定の領域に閉じ込める「ポテンシャル井戸」を考えます。最も単純なモデルが、井戸の外側が無限大のポテンシャル ($V = \infty$) の場合です。



波動関数: 境界 ($x = 0, a$) でゼロになる必要があるため、正弦波になります。

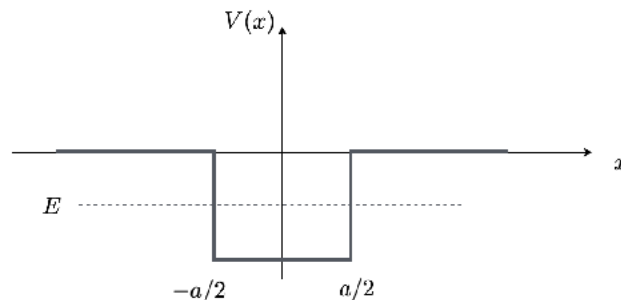
$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

エネルギー準位の量子化:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

エネルギーは連続的な値を取れず、飛び飛びの値 (離散的) になります。また、井戸の幅 a が狭いほどエネルギー間隔は広がります。

2.15.5 有限井戸型ポテンシャル (Potential Well with Finite Depth)



より現実的なモデルとして、深さが有限 (V_0) の井戸を考えます (井戸の中 $-a/2 \leq x \leq a/2$ で $V = -V_0$ 、外で $V = 0$)。束縛状態 (Bound States, $E < 0$) エネルギーが負 (井戸の深さよりは上だが、外のポテンシャルより低い) の状態です。

井戸の外側では波動関数は指数関数的に減衰します ($e^{-\alpha|x|}$)。

特徴: 束縛状態の数は有限です (無限井戸とは異なる点)。井戸が浅すぎたり狭すぎたりすると、束縛状態が存在しない場合もあります。

エネルギー準位は超越方程式 (グラフの交点など) を解くことで求められます。深い井戸の場合の近似式は以下の通りです。

$$E_n \approx -V_0 + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

量子閉じ込め効果 (Quantum Confinement)

半導体ナノ粒子 (量子ドット) などでは、サイズ a をナノメートルオーダーにすることで、電子の状態を制御します。

サイズが変わるとエネルギー準位 E_n が変わるため、発光する色 (波長) をサイズで調整できます。

散乱状態 (Scattering States, $E > 0$)

粒子が井戸に捕らわれず、外部から来て通り過ぎる状態です。

古典力学ではそのまま通過するだけですが、量子力学では透過係数 T が振動します。

特定のエネルギーでは透過率が 1 になりますが、それ以外では一部反射されます (井戸の上を通過しているにもかかわらず反射が起きる、量子力学特有の現象です)。

透過係数の式 ($E > 0$):

$$T = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right) \right)^{-1}$$

2.16 The harmonic oscillator

1. 古典的調和振動子とポテンシャル

Classical Harmonic Oscillator & Potential

まず、量子力学に入る前に、原子間の結合などのモデルとなる古典的な振動について触れています。

調和ポテンシャル (Harmonic Potential):

バネのように、平衡位置からズレればズレるほど元の位置に戻そうとする力が働くシステムです。ポテンシャルエネルギー E_{pot} は放物線 (2 次関数) の形になります。

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$$

ここで D はバネ定数のような定数です。力 F はポテンシャルの傾き (微分) で表されるため、変位 x に比例した復元力 (Restoring force) となります。

$$F = -\text{grad}(E_{pot}) = -Dx$$

モースポテンシャル (Morse Potential):

実際の原子分子の結合は、単純な放物線よりも複雑です。原子が近づきすぎると強い反発力が働き、離れると結合が切れます。これをより正確に表すのがモースポテンシャルです。

$$E_{pot} = D_e (1 - e^{-a(r-r_e)})^2 - D_e$$

r_e : 平衡位置 (Equilibrium position)。最も安定した原子間距離。

近似 (Approximation): 平衡位置 r_e のごく近くで小さく振動する場合には限れば、この複雑なモースポテンシャルも単純な調和ポテンシャル (放物線) として近似できます。

2. 量子力学的調和振動子の設定 Quantum Mechanical Harmonic Oscillator Setup

古典力学では $F = ma$ を解きますが、量子力学ではシュレーディンガー方程式を扱います。

シュレーディンガー方程式 (Schrödinger Equation):

調和ポテンシャル $\frac{1}{2}Dx^2$ を持つ粒子に対する方程式です。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

ここで、振動数 ω と定数 D の関係 $\omega = \sqrt{D/m}$ を用いています。

3. 無次元化と漸近挙動 Dimensionless Variables & Asymptotic Behavior

この複雑な微分方程式を解くために、数学的な工夫を行います。

無次元変数 (Dimensionless Variable):

物理単位（長さやエネルギー）を取り除いた変数 ξ (クシー) と C を導入して式をスッキリさせます。

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad C = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

これにより、方程式は以下のように単純化されます。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi(\xi) + (C - \xi^2)\psi(\xi) = 0$$

漸近挙動 (Asymptotic Behavior):

ξ が非常に大きい（中心から遠く離れた）場所ではどうなるかを考えます。このとき方程式は $\psi'' \approx \xi^2 \psi$ となり、その解はガウス関数の形になります。

$$\psi(\xi) \propto e^{-\xi^2/2}$$

これは、遠くに行けば行くほど粒子の存在確率はゼロに近づく（有界である）ことを保証するために必要な形です。

4. エルミート多項式と量子化 Hermite Polynomials & Quantization

波動関数の形を $\psi(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ と仮定して元の方程式に代入すると、残りの部分 $H(\xi)$ に対する方程式が得られます。

エルミート微分方程式 (Hermite Differential Equation):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial H}{\partial \xi} + (C - 1)H = 0$$

この方程式の解 $H_n(\xi)$ はエルミート多項式 (Hermite Polynomials) と呼ばれる特定の多項式になります。

級数展開と打ち切り (Power Series & Termination):

$H(\xi)$ を $\sum a_k \xi^k$ という級数で表すと、係数の間に以下の漸化式 (Recursive equation) が成り立ちます。

$$a_{k+2} = \frac{2k - (C - 1)}{(k + 2)(k + 1)} a_k$$

ここが最重要ポイントです。もしこの級数が無限に続くと、波動関数は発散してしまいます (物理的にあり得ない)。波動関数が物理的に意味を持つためには、この級数がどこかで終わらなければなりません (有限多項式になる)。そのためには分子がゼロになる、つまりある整数 n ($0, 1, 2, \dots$) に対して以下の条件が必要です。

$$2n - (C - 1) = 0$$

この数学的な要請から、エネルギーが飛び飛びの値しか取れないこと (量子化) が導かれます。

5. エネルギー固有値と零点エネルギー Energy Eigenvalues & Zero-Point Energy

上記の条件 $C = 2n + 1$ をエネルギーの式に戻すと、有名なエネルギー準位の式が得られます。

エネルギー固有値 (Energy Eigenvalues):

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

エネルギーは等間隔 ($\hbar\omega$ ずつ) に並びます。

零点エネルギー (Zero-Point Energy):

$n = 0$ (最もエネルギーが低い状態) でも、エネルギーはゼロになりません。

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

これは不確定性原理 (Uncertainty Principle) によるものです。粒子が完全に停止する (位置も運動量も確定する) ことは許されないため、絶対零度であっても粒子は常に「揺らいで」います。

6. 波動関数と確率密度 Wavefunctions & Probability Density

最終的な波動関数の形は以下のようになります。

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

規格化定数 (Normalization Constant) N_n : 全空間での存在確率の合計を 1 にするための係数。

物理的意味:

- $n = 0$ (基底状態): ガウス関数 (正規分布) の形。中心にいる確率が最も高い。
- $n > 0$ (励起状態): エルミート多項式の次数が上がり、波の山と谷 (節) の数が増えていきます。

7. 対応原理 Correspondence Principle

量子力学と古典力学の関係性についての議論です。

対応原理 (Correspondence Principle):

量子数 n が非常に大きい ($n \gg 1$) 極限では、量子力学の結果は古典力学の結果に近づくという原理です。

確率密度の違い:

- 古典力学: 振り子は端っこで速度がゼロになるため、端にいる時間が長く、端で見つかる確率が最大になります ($P_{cl}(x) \propto \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$)。中心は速く通り過ぎるので確率は低いです。
- 量子力学 ($n = 0$): 真逆です。中心にいる確率が最大で、端に行くほど下がります。これは純粋な量子効果です。
- 量子力学 ($n \rightarrow \text{large}$): n が大きくなると、波動関数が激しく振動しますが、その「平均的な概形」を見ると、古典力学の「端が高く中が低い」分布に一致していきます (図 4 の説明)。

8. 光学とのアナロジー (ガウシアンビーム)**Analogy to Gaussian Beam Optics**

最後に、この量子力学の数式が、全く別の分野である「レーザー光学」でも現れるという面白い話です。

近軸波動方程式 (Paraxial Wave Equation):

レーザー光などが進む様子を表す式です。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2(x^2 + y^2)u = 0$$

この式は、実はシュレーディンガー方程式と数学的に全く同じ形をしています。

- 光の進行方向 $z \leftrightarrow$ 時間 t
- ビームの幅 \leftrightarrow 振動数 ω

エルミート・ガウシアンモード (Hermite-Gaussian Modes):

量子力学での「エネルギー準位」に対応するものが、光学では「ビームのモード (形状)」になります。式も同様にエルミート多項式とガウス関数で表されます。

$$u_{mn} \propto H_m(\dots)H_n(\dots)e^{-(x^2+y^2)/w^2}$$

これにより、レーザー光の断面形状 (TEM モード) が決定されます。

2.17 Angular Momentum and Spherical Potentials**1. 球対称ポテンシャルと原子単位系 (Spherical Potentials & Atomic Units)**

これまで (箱の中の粒子など) は 1 次元的な問題を扱ってきましたが、ここでは 3 次元の現実的な原子モデルへ進みます。

球対称性 (Spherical Symmetry):

ポテンシャル V が原点からの距離 r だけに依存し、角度 (方向) に依存しない性質のことです。水素原子における電子が感じるクーロン力などがこれに当たります。

$$V(r) = -\frac{1}{r} \quad (\text{原子単位系})$$

原子単位系 (Atomic Units):

原子物理学で計算を簡単にするために使われる単位系です。

- エネルギーの単位: ハートリー (Hartree, Ha)

$$1 \text{ Ha} \approx 27.211 \text{ eV}$$

- 長さの単位: ボーア半径 (Bohr radius, a_0)

$$1a_0 \approx 0.529 \text{ \AA}$$

ネーターの定理 (Noether's Theorem):

「対称性があるところには保存則がある」という物理学の基本原則です。

球対称性 (Rotational Symmetry) → 角運動量の保存 (Conservation of Angular Momentum)

このため、球対称なポテンシャルを持つ系 (水素原子など) では、角運動量が非常に重要な役割を果たします。

2. 量子力学における演算子 (Operators)

量子力学では、位置や運動量などの物理量は「数」ではなく「演算子 (関数に作用するもの)」として扱われます。

主要な演算子:

- 位置 (Position): \hat{x} (波動関数に x を掛ける)
- 運動量 (Momentum): $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (空間微分して $-i\hbar$ を掛ける)
- ハミルトニアン (Hamiltonian / Energy): $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ (全エネルギーに対応)

エルミート性 (Hermiticity):

物理量は測定したら必ず「実数」にならなければなりません。そのため、物理量に対応する演算子 \hat{A} は以下のエルミート条件を満たします。

$$\int \psi^* (\hat{A}\psi) dx = \int (\hat{A}\psi)^* \psi dx$$

これによって、測定値 (固有値) が実数であることが保証されます。

3. 固有値と期待値 (Eigenvalues & Expectation Values)**固有値方程式 (Eigenvalue Equation):**

ある演算子 \hat{A} を関数 ψ に作用させたとき、元の関数の定数倍になる場合、その定数 a を固有値 (Eigenvalue)、関数を固有関数 (Eigenfunction) と呼びます。

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

測定を行ったときに得られる値は、この「固有値」だけです。

期待値 (Expectation Value):

同じ状態にある系に対して何度も測定を行ったときの平均値です。記号 $\langle A \rangle$ で表されます。

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}\psi dx$$

固有状態における不確定性:

系が演算子 \hat{A} の固有状態 ψ にあるとき、測定のばらつき（不確定性）はゼロになります。証明: $\hat{A}\psi = a\psi$ なので、

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= a, & \langle A^2 \rangle &= a^2 \\ \sigma_A^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = a^2 - a^2 = 0\end{aligned}$$

つまり、固有状態にあるときは、いつ測定しても必ず同じ値 a が得られます。

4. 交換子と不確定性原理 (Commutators & Uncertainty Principle)

2 つの物理量を「同時に」正確に測定できるかどうかを判定する重要なツールです。

交換子 (Commutator):

2 つの演算子 \hat{A}, \hat{B} の順序を変えて引き算したものです。

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

交換しない (Do not commute):

$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ の場合、その 2 つの物理量は同時に確定した値を持ち得ません。

例: 位置と運動量 テスト関数 $f(x)$ を使って計算すると:

$$[\hat{x}, \hat{p}]f(x) = x \left(-i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (xf(x)) \right)$$

積の微分公式 $\frac{\partial}{\partial x}(xf) = f + x\frac{\partial f}{\partial x}$ を使うと、

$$\begin{aligned}&= -i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= i\hbar f(x)\end{aligned}$$

よって、以下の有名な正準交換関係が導かれます。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

ハイゼンベルクの不確定性原理 (Heisenberg Uncertainty Principle):

交換しない演算子のペアには、測定精度の限界が存在します。

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

5. 重ね合わせと測定 (Superposition & Measurement)**重ね合わせの状態 (Superposition State):**

一般の波動関数 Ψ は、固有関数 ψ_n の足し合わせで書けます。

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n$$

ここで $|c_n|^2$ は、測定したときに固有値 a_n が得られる確率 (Probability) を表します。

波動関数の収縮 (Collapse):

測定を行って値 a_n が得られた瞬間、波動関数は重ね合わせの状態から、その固有状態 ψ_n へと一瞬で変化 (収縮) します。

6. 角運動量演算子 (Angular Momentum Operator)

球対称な系（水素原子）を解く となるのが角運動量です。

定義:

古典力学の $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ に対応して、量子力学では外積の形で定義されます。

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)$$

各成分の形:

行列式のように展開すると、各成分が得られます。

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

交換関係 (Commutation Relations):

角運動量の成分同士は交換しません（同時に測定できない）。例えば $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ を計算すると以下のようになります（導出の概略）:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x$$

これを計算すると、 z 成分が現れます。

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

同様に、 $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$ となり、角運動量の向き (x, y, z 成分) を同時に完全に知ることはできません。

7. 角運動量の量子化 (Quantization of Angular Momentum)

成分同士は同時に測定できませんが、角運動量の大きさの 2 乗 (\hat{L}^2) と 1 つの成分（通常は \hat{L}_z ）は同時に測定可能です（交換するため）。これを解くと、2 つの量子数が現れます。

方位量子数 (Azimuthal Quantum Number) l :

角運動量の大きさを決定します。

$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$$

$l = 0, 1, 2, \dots$ (整数) この l に対応して、s 軌道 ($l = 0$)、p 軌道 ($l = 1$)、d 軌道 ($l = 2$) と呼ばれます。

磁気量子数 (Magnetic Quantum Number) m :

角運動量の z 軸方向の成分（射影）を決定します。

$$\hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$

m は $-l$ から $+l$ までの整数値をとります ($2l+1$ 個の状態)。例: $l = 1$ (p 軌道) の場合、 $m = -1, 0, +1$ の 3 つの状態（縮退）があります。

結論:

水素原子のような球対称な系では、電子の状態はエネルギーだけでなく、「角運動量の大きさ (l)」と「その向き (m)」によって分類され、飛び飛びの値（量子化された値）しか取れないことがわかります。

2.18 Parametric Downconversion

2.18.1 1. パラメトリック下方変換 (Parametric Downconversion: PDC)

これは、高エネルギーの光子 1 つが、低エネルギーの光子 2 つに分裂する現象です。

基本概念:

- **ポンプ光 (Pump Photon):** 入射する高エネルギーの光子。
- **シグナル光 (Signal Photon) & アイドラー光 (Idler Photon):** 分裂して生まれた 2 つの低エネルギー光子。
- **非線形結晶 (Nonlinear Crystal):** この現象が起こる特殊な結晶 (例: BBO 結晶 - ベータ・バリウム・ボレート)。

物理的な意味: 通常、光同士は相互作用しませんが、特定の結晶中では「非線形光学効果」により、強い光 (ポンプ) が物質の電子を揺さぶり、その振動が新たな光 (シグナル・アイドラー) を生み出します。このプロセスは「量子もつれ光子対」を作る最も一般的な方法です。

2.18.2 2. 非線形光学の基礎 (Nonlinear Optics Primer)

通常、物質の分極 (電気的な偏り) は電場に比例しますが、強い光が入るとその比例関係が崩れます。

数式による記述: 物質の分極 $P(t)$ は電場 $E(t)$ のべき級数で表されます。

$$P(t) = \epsilon_0(\chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots)$$

- ϵ_0 : 真空の誘電率 (Vacuum permittivity)。
- $\chi^{(1)}$: 線形感受率 (Linear susceptibility)。屈折率などに関係します。
- $\chi^{(2)}$: 2 次の非線形感受率 (Second-order susceptibility)。これが PDC を引き起こす重要な項です。

なぜ分裂が起きるのか (混合項の導出): 結晶中にはポンプ (p)、シグナル (s)、アイドラー (i) の 3 つの波が存在すると考えます。全電場はそれらの重ね合わせです。

$$E_{total} = E_p + E_s + E_i$$

これを 2 次の項 E^2 に代入して展開すると、様々な周波数の成分 (混合項) が出てきます。PDC にとって重要なのは、異なる周波数が混ざり合う「クロス項」です。例えば、 E_p (ポンプ) と E_s^* (シグナルの複素共役) の積を含む項は、次のような振動数を持ちます。

$$\omega_{new} = \omega_p - \omega_s$$

エネルギー保存則 (後述) により $\omega_p - \omega_s = \omega_i$ となるため、この分極の振動はアイドラー光と同じ周波数を持ちます。つまり、ポンプ光とシグナル光の相互作用が、アイドラー光を増幅させる「源 (ソース)」として働くのです。これが相互増幅の本質です。

2.18.3 3. 位相整合条件 (Phase Matching Condition)

光子対が効率よく発生するためには、「エネルギー保存則」と「運動量保存則」の両方を満たす必要があります。

A. エネルギー保存則 (Conservation of Energy)

ポンプ光子のエネルギーが、シグナルとアイドラーに分配されます。

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$$

(\hbar を消去すると振動数の式になります)

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i$$

B. 運動量保存則 (Conservation of Momentum)

結晶中で波が干渉して強め合うための条件で、位相整合 (Phase matching) とも呼ばれます。

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$

ここで \vec{k} は波数ベクトル (波の進む方向と勢い) です。波数の大きさは $k = \frac{n(\omega)\omega}{c}$ (n は屈折率) なので、この式は屈折率を含んだ形に書き換えられます。

$$n_p(\omega_p)\omega_p = n_s(\omega_s)\omega_s + n_i(\omega_i)\omega_i$$

重要: 物質の屈折率 n は光の色 (周波数) によって異なる (分散がある) ため、通常はこの条件を満たすのは困難です。そこで、「複屈折」という性質を持つ結晶を使い、角度や偏光を調整して n をうまく合わせます。

2.18.4 4. Type-I と Type-II の違い (Type-I vs Type-II PDC)

位相整合を満たすための偏光 (光の振動方向) の組み合わせによって、2 つのタイプに分類されます。

Type-I PDC: シグナルとアイドラーが同じ偏光を持つ。例: ポンプ (異常光線 e) \rightarrow シグナル (常光線 o) + アイドラー (常光線 o)。式: $e \rightarrow o + o$

Type-II PDC: シグナルとアイドラーが直交する偏光を持つ。例: ポンプ (異常光線 e) \rightarrow シグナル (異常光線 e) + アイドラー (常光線 o)、またはその逆。式: $e \rightarrow e + o$

Type-II における量子もつれの生成:

Type-II では、屈折率の違いによりシグナルとアイドラーが別々の円錐状 (コーン) に放出されます。この 2 つのコーンが交わる部分 (交点) では、どちらのコーンから来た光子か区別が付きません。この「区別がつかない」という状況が、量子的な重ね合わせを生み出します。

交点での量子状態は以下のようになります。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_S, V_I\rangle + e^{i\phi}|V_S, H_I\rangle)$$

- $|H_S, V_I\rangle$: シグナルが水平 (H)、アイドラーが垂直 (V) の偏光を持つ状態。
- $|V_S, H_I\rangle$: シグナルが垂直 (V)、アイドラーが水平 (H) の偏光を持つ状態。

この状態は、「H と V のペア」と「V と H のペア」が同時に重なり合って存在しており、観測するまでどちらか定まっていません。

2.18.5 5. 量子もつれ (Quantum Entanglement)

定義: 2 つの粒子の状態が独立して記述できず、片方の測定結果がもう片方の状態を即座に決定する性質です。

EPR パラドックスとベルの定理: アインシュタインらは、「遠く離れた粒子の状態が瞬時に決まるのはおかしい (不気味な遠隔作用)」として、量子力学は不完全であり、我々が知らない「隠れた変数 (Hidden Variable)」があらかじめ結果を決めているはずだと主張しました (局所実在論)。しかし、ジョン・ベルは、もし「隠れた変数」が存在するなら、測定結果の相関はある限界値 (ベルの不等式) を超えないことを数学的に示しました。

2.18.6 6. CHSH 不等式 (CHSH Inequality)

ベルの不等式を実験で検証しやすい形にしたのが CHSH 不等式です。

設定: アリス (A) とボブ (B) がそれぞれ光子を受け取り、偏光を測定します。

- 測定角度: アリスは θ_A か θ'_A 、ボブは θ_B か θ'_B を選びます。

- 測定結果: A, B は $+1$ または -1 の値をとります。

相関 E : ある角度設定でのアリスとボブの結果の積の平均値 (相関) を $E(\theta_A, \theta_B)$ とします。

隠れた変数理論 (古典論) の限界:

「隠れた変数 λ 」によって結果があらかじめ決まっていると仮定すると、次の量 S を考えます。

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$$

古典論では、どのような隠れた変数を仮定しても、この S の絶対値は 2 以下になる必要があります。

$$|S_{\text{classical}}| \leq 2$$

量子力学の予測:

量子力学 (特にもつれ状態) を使って計算すると、最適な角度設定 (例: 各角度を 22.5 度ずつずらす) において、この値は 2 を超えます。

$$|S_{\text{quantum}}| = 2\sqrt{2} \approx 2.828$$

この $2\sqrt{2}$ という値 (チレルソン限界) は、古典的な限界である 2 を明確に破っています。実験結果が 2 を超えることを示すことで、「隠れた変数は存在せず、量子力学の記述が正しい (実在は局所的ではない)」ことが証明されます。

角度の視覚化: 最適な角度設定では、アリスとボブの測定軸が互い違いに配置されます (例: $0^\circ, 45^\circ$ と $22.5^\circ, 67.5^\circ$)。これにより相関 E を最大化・最小化する組み合わせを作り出し、 S の値を大きくします。

2.18.7 まとめ

この Lecture ノートは、以下の流れで「光の物理」から「量子力学の核心」へと展開しています。

- **非線形光学 (PDC):** 特殊な結晶で 1 つの光子を 2 つに分裂させる。
- **保存則:** その際、エネルギーと運動量 (位相整合) が保存される。
- **量子状態の生成:** Type-II PDC の交点を利用して、偏光が重なり合った「もつれ状態」を作る。
- **検証 (CHSH):** 作られたもつれ光子対を使って相関を測定し、古典物理学 (隠れた変数) では説明できない相関の強さ ($S > 2$) を確認する。

2.19 The Quantum Zeno Effect

2.19.1 導入と歴史的背景 (Introduction and Historical Background)

量子ゼノン効果 (Quantum Zeno Effect, QZE) とは、「不安定な量子系に対して頻繁に観測 (測定) を行うと、その系の状態変化 (崩壊や遷移) が抑制される」という現象です。

名前の由来: 古代ギリシャの哲学者エレアのゼノン (Zeno of Elea) にちなんでいます。**ゼノンのパラドックス (Zeno's arrow paradox):** 「飛んでいる矢はある一瞬を切り取れば静止している。静止している瞬間の連続であるならば、矢は動くことができないはずだ」という逆説です。これを量子力学に当てはめ、「観測によって量子系の時間発展 (動き) を凍結させる」という類似性から名付けられました。

歴史: ノイマン (von Neumann) の初期の研究などに概念は見られましたが、1977 年にジョージ・スダルシャン (George Sudarshan) とバイディアナ・ミスラ (Baidyanath Misra) によって正式に命名され、解析されました。

2.19.2 理論的枠組みと導出 (Theoretical Framework)

ここでは、観測がいかんして変化を止めるのか、実際の数式を用いて説明します。

ステップ 1：初期状態と時間発展

ある量子系が初期状態 ψ_0 にあるとします。時間が t だけ経過した後の状態 $\psi(t)$ は、シュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation) に従って変化します。このとき、システムが「初期状態のまま留まっている確率 (生存確率)」 $P(t)$ は、初期状態と時間経過後の状態の「重なり (内積)」の絶対値の 2 乗で表されます。

$$P(t) = |\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|^2$$

ステップ 2：短時間での近似 (テイラー展開)

ごく短い時間 t において、この確率 $P(t)$ をテイラー展開 (Taylor series) して近似すると、以下のようになります。

$$P(t) \approx 1 - \frac{t^2}{\tau_Z^2}$$

ここで、 τ_Z はゼノン時間 (Zeno time) と呼ばれる、そのシステム固有の特性時間です。重要なのは、確率の減少が時間の 2 乗 (t^2) に比例している点です。

ステップ 3：頻繁な測定による効果

ここで、合計時間 T の間に、間隔 $\tau = T/N$ で N 回の測定を行うとします。1 回の測定ごとにシステムが初期状態に戻ると仮定すると、 N 回の測定すべてで初期状態に留まる確率は、1 回の生存確率の N 乗になります。

$$P_N(T) \approx \left[1 - \left(\frac{T}{N\tau_Z} \right)^2 \right]^N$$

ステップ 4：連続測定の極限

測定回数 N を無限大 ($N \rightarrow \infty$) にする、つまり絶え間なく観測し続ける極限をとります。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(T) = 1$$

この極限では確率は 1 に近づきます。つまり、連続的に観測し続ける限り、システムは初期状態から決して変化しない (凍結される) という数学的結論が得られます。これが量子ゼノン効果の正体です。

2.19.3 対比：偏光の段階的回転 (Gradual Polarization Rotation)

よく量子ゼノン効果と混同される例として、「偏光板による光の回転」がありますが、これは本質的に異なる現象です。

- **量子ゼノン効果:** 変化を「止める」現象。
- **偏光の回転:** 変化を「導く」現象。

偏光板の例

光の偏光を 90 度 ($\pi/2$) 回転させたい場合を考えます。 N 枚の偏光板 (Polarizers) を用意し、それぞれ前の偏光板から $\theta = \frac{\pi}{2N}$ ずつ角度をずらして設置します。1 枚の偏光板を通過する確率 (透過率) は $\cos^2(\theta)$ で表されます。したがって、 N 枚すべてを通過する確率は以下のようになります。

$$P_{total} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2N} \right) \right]^{2N}$$

測定回数 (枚数) N を増やすと、偏光板ごとの角度差は小さくなり、この確率は 1 に近づきます (100% の光が通過し、かつ偏光は 90 度回転します)。これは、状態を凍結するのではなく、断熱的 (Adiabatic-like) に、つまりシステムが変化に追従できるようにゆっくりと状態を変化させている例です。

2.19.4 断熱発展と段階的測定 (Adiabatic Evolution and Gradual Measurements)

上記の偏光板の例は、量子力学における断熱発展 (Adiabatic evolution) と似た特徴を持っています。

断熱定理 (Adiabatic theorem): システムのハミルトニアン (エネルギー環境) を十分にゆっくり変化させれば、システムはその固有状態に留まったまま、環境の変化に追従して状態を変えていくという定理です。

偏光板の例は、連続的なハミルトニアンの変化ではなく「段階的な射影測定 (Sequential projective measurements)」ですが、少しずつ基底 (測定の基準) を回転させることで、損失なく状態を目的の方向へ導くことができる点等で類似しています。

2.19.5 実験結果と現在の研究 (Experimental Results and Current Research)

- **最初の実証:** 1990年、イタノ (Itano) らにより、捕捉されたベリリウムイオン (Beryllium ions) を用いて、頻繁な測定が準位間の遷移を抑制することを初めて明確に実証しました。
- **逆ゼノン効果 (Anti-Zeno Effect):** 後の研究で、観測の頻度や条件によっては、逆に崩壊や変化を加速させてしまう現象も発見されました。
- **応用:** 現在では、量子計算 (Quantum computation) におけるエラー防止や、デコヒーレンス (量子状態の破壊) の制御に応用されています。

2.19.6 応用例: 液晶ディスプレイ (Liquid Crystal Displays - LCD)

講義ノートでは、前述の「偏光の段階的回転」の実用的な例として、ツイステッド・ネマティック (Twisted Nematic, TN) 液晶ディスプレイが挙げられています。

構造

2枚のガラス基板の間で、液晶分子 (Liquid crystal molecules) が90度ねじれた螺旋階段のような構造を作っています。

原理 (通常時 - 白表示)

光が入射すると、液晶分子のねじれに沿って、光の偏光方向がゆっくりと「導波」されるように90度回転します。これにより、直交する2枚目の偏光板を通過でき、画面は明るくなります (偏光板の多数枚重ねと同じ効果を連続的な分子配列で実現しています)。

原理 (電圧印加時 - 黒表示)

電圧をかけると、液晶分子が電場方向に整列し、ねじれ構造が解けます。すると光の回転が起こらず、2枚目の偏光板で光がブロックされ、画面は暗くなります。

この液晶の動作は、量子ゼノン効果 (変化の凍結) ではなく、段階的な偏光回転 (変化の誘導) の良い実例となっています。